NATHAN TECHNIQUE

TOME 2

Mathématiques

industriel

Jean-Denis Astier
Maurice Bonnard

Bac pro

NATHAN

TOME 2

Mathématiques industriel

Bac pro

Jean-Denis Astier
Inspecteur pédagogique régional
Professeur d'E.N.N.A.

Maurice Bonnard
Inspecteur pédagogique régional
Professeur d'E.N.N.A.

NATHAN

AVANT-PROPOS

Ce deuxième tome de l'ouvrage « Mathématiques Bac pro », pour le secteur industriel s'adresse aux élèves de première et terminale professionnelles des spécialités liées aux métiers de l'électricité et de la chimie énérgétique.

Ce livre complète les thèmes traités dans le premier tome (étude des fonctions, ...) et aborde de nouvelles notions (nombres complexes, signal, ...).

Conformément au programme, les résultats théoriques importants sont admis. Ces derniers prennent sens à travers des manipulations et applications nombreuses. Pour faciliter la compréhension, pour alléger les aspects « calculatoires » ou simplement pour illustrer les démarches préconisées, il est souvent fait appel à l'utilisation des graphiques, de la calculatrice ou des logiciels informatiques.

Les méthodes et outils présentés et mis en œuvre dans ce manuel doivent aider à mieux maîtriser le fonctionnement des modèles mathématiques employés dans les autres enseignements qu'ils soient scientifiques, techniques ou professionnels.

Comme dans le tome 1, chaque chapitre précédé des objectifs à atteindre est construit autour de huit rubriques qui progressivement amènent l'élève à la compréhension et à la résolution des problèmes mathématiques traités.

Nous pensons que cet ouvrage sera un outil efficace pour la préparation des élèves au baccalauréat professionnel.

Jean-Denis Astier – Maurice Bonnard

© Editions Nathan, 9, rue Méchain, 75014 Paris, 1996. ISBN : 2.09.177237.2.

SOMMAIRE

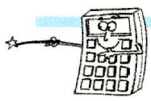
1	Dérivation – Compléments	Bilan 12	5
2	Calcul intégral	Bilan 24	17
3	Nombres complexes	Bilan 36	29
4	Equations différentielles	Bilan 48	43
5	Signaux périodiques	Bilan 62	53
6	Somme de signaux périodiques	Bilan 81	69
7	Approximation d'un signal périodique	Bilan 98	89
	Eléments de réponses des exercices et problèmes Tableaux		107
	Répartition des chapitres selon les spécialités		133
	Formulaires		134

POUR DÉCOUVRIR VOTRE LIVRE

Chaque chapitre comporte les rubriques suivantes :

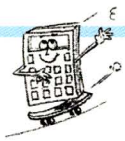
Pour prendre un bon départ

propose à l'élève des *activités simples* qui lui permettent de faire le point sur les connaissances acquises, indispensables à la poursuite de l'étude du chapitre. Des « Éléments de réponse » apportent les précisions nécessaires à la résolution des activités.



Posons le problème

présente de façon claire et accessible le déroulement et le contenu du chapitre et met ainsi l'élève en situation d'étude.



Activités et résultats

permettent à l'élève de *consolider ses acquis* du BEP et également de *découvrir des résultats nouveaux*. L'acquisition de tout résultat nouveau est assurée par une ou plusieurs « Applications directes ».

Faisons le point

sont des bilans partiels qui interviennent tout au long du déroulement du chapitre et permettent de fixer les acquis de façon progressive.

Le Bilan

rassemble les *notions fondamentales* utilisées ou acquises et fournit des points d'ancrage essentiels pour l'étude de situations usuelles ou professionnelles.

Pour s'entraîner

regroupe de nombreux *exercices d'entraînement* qui permettent à l'élève d'affermir ses connaissances de base. Pour chacun de ces exercices une *solution abrégée* est donnée en fin d'ouvrage.

Le Jour du Bac

présente un *problème corrigé* et souvent *commenté*, qui met l'élève en *situation d'examen*.

Pour approfondir

rassemble des séries de problèmes de difficultés graduées reposant sur des situations du domaine professionnel. Leur objectif est de renforcer l'*acquisition des méthodes*. Les problèmes estampillés Bac Pro replacent l'élève en *situation d'examen*. Les *corrigés* de certains de ces problèmes figurent en fin d'ouvrage et permettent ainsi à l'élève de *s'évaluer* et de *progresser*.

- **Dans la marge,** l'indication E_1 à E_n renvoie l'élève aux exercices d'entraînement qu'il doit être en mesure de traiter.
- **Dans la rubrique « Pour approfondir »** trois sigles sont utilisés pour repérer le niveau de difficultés des problèmes :
  - • abord facile
  - •• plus difficile
  - BAC PRO situation d'examen

  De plus, le sigle ✔ signale que des éléments de réponse sont proposés en fin d'ouvrage.

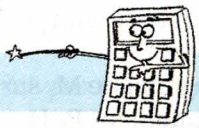
1

DÉRIVATION – COMPLÉMENTS

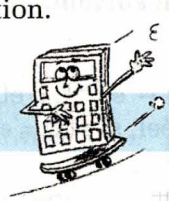
Objectifs

- **Connaître et utiliser les fonctions dérivées des fonctions : $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{ax+b}$.**
- **Savoir déterminer la dérivée du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction, du quotient de deux fonctions.**

Posons le problème



En classe de Baccalauréat Professionnel, de nombreuses fonctions sont utilisées dans les enseignements scientifiques et professionnels pour modéliser des situations parfois complexes. Ces modèles sont construits à l'aide de fonctions vues précédemment. Les questions posées demandent alors d'en savoir « un peu plus » sur la dérivation.
La première partie du chapitre permet de découvrir les fonctions dérivées des fonctions logarithmes et exponentielles puis celles des fonctions sinus et cosinus.
La seconde partie donne les règles de dérivation de fonctions du type uv, $\frac{1}{v}$, $\frac{u}{v}$ où u et v désignent des fonctions dérivables.
La fin du chapitre propose, à partir de l'étude d'une fonction, un exemple de programmation des valeurs de cette fonction.

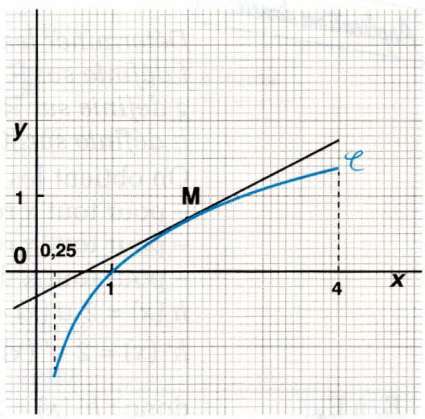


Activités et résultats

1. Dérivées des fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$

a. Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$

La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Considérons la courbe $\mathscr{C}$, qui représente dans un repère orthonormal, cette fonction sur l'intervalle $[0{,}25 ; 4]$.
On constate qu'en chacun de ses points, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente non parallèle à l'axe des ordonnées.
Ainsi, la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle considéré.



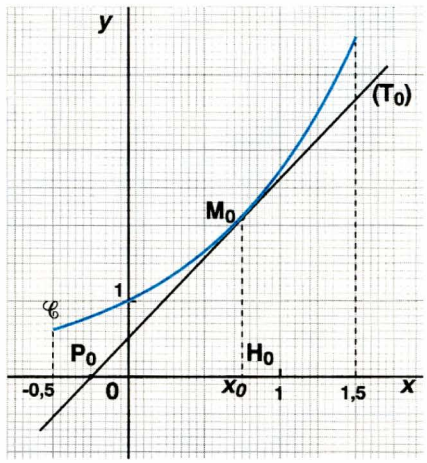
On admettra :

Faisons le point

La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Sa fonction dérivée est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, si $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$.

b. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$

Soit, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}$ qui représente la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[-0,5 ; 1,5]$.
Soit x_0 un nombre de $[-0,5 ; 1,5]$ et M_0 le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0 ; la tangente (T_0) en M_0 à la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en P_0. On note H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des abscisses.
On vérifie que la longueur $P_0 H_0$ est égale à l'unité choisie en abscisse.
Placer un point M_1 sur la courbe $\mathscr{C}$, tracer la tangente (T_1) en M_1 à $\mathscr{C}$; cette tangente coupe l'axe des abscisses en P_1.
On note H_1 le projeté orthogonal de M_1 sur l'axe des abscisses ; évaluer graphiquement $P_1 H_1$.
Que peut-on conjecturer pour $f'(x_1)$?



On admettra :

Faisons le point

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa fonction dérivée f' est la fonction f elle-même.
Pour tout x réel, si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

c. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$; a et b réels

On admettra le résultat suivant.

Faisons le point

La fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, a et b réels, est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel, si $f(x) = e^{ax+b}$, alors $f'(x) = ae^{ax+b}$.

Applications directes

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f, g, h suivantes :
f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto e^{0,5x+2}$
g définie sur $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto e^{-3x+1}$
h définie sur $]0 ; +\infty[$ *par* $x \mapsto 2 \ln x + 3 e^{-x}$.
On obtient les résultats suivants :
– pour tout x réel, $f'(x) = 0,5\, e^{0,5x+2}$
– pour tout x réel, $g'(x) = (-3)\, e^{-3x+1}$
– pour tout x de $]0, +\infty[$:

$h(x) = 2u(x) + 3v(x)$	avec	$u(x) = \ln x$	et	$v(x) = e^{-x}$
$h'(x) = 2u'(x) + 3v'(x)$	avec	$u'(x) = \frac{1}{x}$	et	$v'(x) = -e^{-x}$

donc : $h'(x) = 2\,\frac{1}{x} + 3(-e^{-x})$; $h'(x) = \frac{2}{x} - 3e^{-x}$.

E_1 à E_4

2. Dérivées des fonctions sinus et cosinus

a. Dérivées des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$

On admettra les résultats suivants.

Faisons le point

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel : si $f(x) = \sin x$ alors $f'(x) = \cos x$
si $f(x) = \cos x$ alors $f'(x) = -\sin x$.

b. Dérivées des fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$; a et b réels*

On admettra les résultats suivants.

Faisons le point

Les fonctions $x \mapsto \sin(ax + b)$ et $x \mapsto \cos(ax + b)$, a et b réels, sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x réel : si $f(x) = \sin(ax + b)$, alors $f'(x) = a\cos(ax + b)$
si $f(x) = \cos(ax + b)$, alors $f'(x) = -a\sin(ax + b)$.

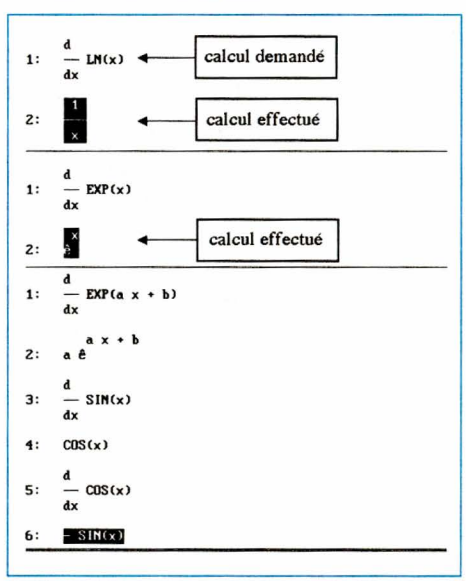
Applications directes

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :
$f : x \mapsto \sin x - 3\cos x$; $g : x \mapsto 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; $h : t \mapsto 5\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.
On obtient :
$f'(x) = \cos x - 3(-\sin x)$; $f'(x) = \cos x + 3\sin x$
$g'(x) = 2\left[-3\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$; $g'(x) = -6\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$
$h'(t) = 5\left[2\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right]$; $h'(t) = 10\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Remarques

Pour confirmer les résultats qui ont été admis précédemment, on peut faire appel au logiciel DERIVE qui permet la détermination des fonctions dérivées.

Voici ce que donne le logiciel DERIVE.
Pour décoder ce qui est affiché à l'écran, il faut connaître la notation suivante, appelée *notation différentielle*, des fonctions dérivées.
Dans cette notation :
– si f est une fonction de la variable x dérivable, alors
f' s'écrit $\frac{d}{dx} f$ ou $\frac{df}{dx}$;
– si g est une fonction de la variable t, dérivable, alors g'
s'écrit $\frac{d}{dt} g$ ou $\frac{dg}{dt}$.
Cette notation est couramment utilisée en Sciences physiques et en particulier en Électricité.



* Le paragraphe **b.** s'adresse uniquement aux élèves des sections des Baccalauréats Professionnels des métiers de l'électricité.

3. Dérivée d'un produit, d'un inverse, d'un quotient

La dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables est égale à la somme de leurs fonctions dérivées. La dérivée d'un produit de deux fonctions dérivables est-elle égale au produit de leurs fonctions dérivées ?

Considérons les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$, respectivement par $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$.

Pour tout x réel, on a :

– d'une part : $u(x) = x^2$ d'où $u'(x) = 2x$

$v(x) = x$ d'où $v'(x) = 1$ donc $u'(x) \times v'(x) = 2x$

– d'autre part : si p désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto u(x) \times v(x)$, appelée produit des fonctions u et v :

$p(x) = x^3$ d'où $p'(x) = 3x^2$.

Pour tout x différent de 0 et de $\frac{2}{3}$, on a : $3x^2 \neq 2x$ c'est-à-dire $\boldsymbol{p'(x) \neq u'(x) \times v'(x)}$.

La fonction dérivée du produit des deux fonctions, n'est pas égale au produit de leurs fonctions dérivées.

On admettra les résultats suivants.

Faisons le point

Les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I.

- *Dérivée de* $\boldsymbol{uv}$

Pour tout x de I, si $f(x) = u(x)\,v(x)$ alors $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$.

- *Dérivée de* $\boldsymbol{\frac{1}{u}}$

Si u ne s'annule pas sur I :

pour tout x de I, si $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

- *Dérivée de* $\boldsymbol{\frac{u}{v}}$

Si v ne s'annule pas sur I :

pour tout x de I, si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Applications directes

a. Dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x+2)\,e^{-x}$

On a, pour tout x réel :

$f(x) = u(x)\,v(x)$ avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = e^{-x}$

d'où : $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$

donc : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$; $f'(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$

$f'(x) = -(x+1)\,e^{-x}$.

b. Dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$

Pour tout x réel, on a : $x^2 + 1 \neq 0$

et : $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 1$

d'où : $f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ avec $u'(x) = 2x$

donc : $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

c. Dérivée de la fonction f définie sur $]2 ; +\infty[$ par $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$

Pour tout x de l'intervalle $]2 ; +\infty[$, on a : $x - 2 \neq 0$

et : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x - 2$

d'où : $f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$ avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$

donc : $f'(x) = \dfrac{2(x-2) - (2x+1)1}{(x-2)^2}$; $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-2)^2}$.

d. Dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$

- *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ; déterminer la fonction dérivée de la fonction u^2.*
- *En utilisant le résultat précédent, déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.*

On supposera que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

– Pour tout x de I, on a, si l'on note g la fonction u^2 :
$g(x) = u(x)\,u(x)$
d'où d'après la règle de dérivation d'un produit dans le cas où $u = v$:
$g'(x) = u'(x)\,u(x) + u(x)\,u'(x)$
donc : $g'(x) = 2\,u(x)\,u'(x)$.

– Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, si $f(x) = \sqrt{x}$, on a :
$(f(x))^2 = x$.

Les fonctions $x \mapsto (f(x))^2$ et $x \mapsto x$ sont égales sur $]0 ; +\infty[$, elles ont donc même dérivée, d'où :
$2f(x)\,f'(x) = 1$. $f(x)$ ne s'annulant pas sur $]0 ; +\infty[$, on obtient alors :

$f'(x) = \dfrac{1}{2f(x)}$ d'où $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc sur $]0 ; +\infty[$, si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

E_6 et E_7

5. Étude de fonction. Programmation de valeurs

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}1 ; 2]$ par $x \mapsto \ln x - x + 2$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisse 4 cm, en ordonnée 8 cm.

a. Compléter le tableau suivant ; on donnera les valeurs arrondies au centième.

x	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
$f(x)$						

b. Déterminer la dérivée f' de la fonction f ; montrer que sur l'intervalle $[0{,}1 ; 2]$, $f'(x)$ a le signe de $(1 - x)$.

c. Donner, en utilisant le résultat précédent, le tableau de variation de f.

d. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. Pour préciser le tracé, on pourra au préalable construire les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ en ses points d'abscisse : 0,2 ; 1 ; 1,5.

Résolution

a. Pour déterminer les valeurs prises par la fonction pour les valeurs données de la variable, utilisons une calculatrice programmable.
Utilisons par exemple une TI 80.
Les opérations sont alors les suivantes :

- On appuie sur la touche [MODE] pour voir si l'option « FUNC » est bien sélectionnée.

Introduction de la fonction f

- On appuie sur la touche [Y=] ; à l'écran, il apparaît : $Y_1=$
- On introduit la fonction :

[LN] ([X,T]) [−] [X,T] [+] [2] [ENTER] ;

à l'écran, il apparaît : $Y_1 = \text{Ln}(X) - X + 2$.

- On revient à l'écran initial avec les touches [2nd] [QUIT] [CLEAR] .

Calcul de l'image d'un nombre
Pour calculer $f(0{,}1)$ on tape :

[2nd] [Y–VARS] [1] [(] [0] [.] [1] [)] [ENTER] ; on lit : − 0,4025...

de même la séquence :

[2nd] [Y–VARS] [1] [(] [2] [)] [ENTER] donnera $f(2)$.

x	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	− 0,4	0,19	0,81	1	0,91	0,69

Remarque
Dans le cas d'un tableau, où les valeurs de x forment une suite arithmétique, on peut utiliser directement l'instruction [TABLE].
Par exemple, pour obtenir les valeurs de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 1 ; 1,25 ; 1,5 ; 1,75 ; 2.

- On tape l'instruction [Tb/Set] à l'aide des touches

[2nd] [WINDOW] .

On rentre la valeur initiale :
TBLMIN = 1
On rentre le pas :
ΔTBL = .25

- L'instruction [TABLE] obtenue à l'aide des touches [2nd] [GRAPH] permet d'obtenir le tableau de valeurs. Pour se déplacer dans ce tableau, on utilise les flèches de direction.

b. En posant, pour tout x de $[0{,}1 ; 2]$, $u(x) = \ln x$ et $v(x) = -x + 2$ on a : $f(x) = u(x) + v(x)$ d'où $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ avec $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = -1$.

On obtient alors : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ ou encore $f'(x) = \frac{1-x}{x}$.

Sur $[0{,}1 ; 2]$ on a $x > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $1 - x$.

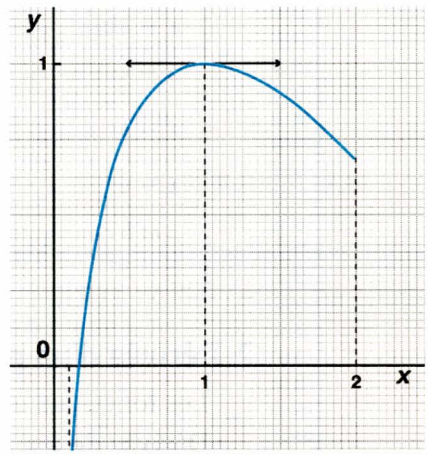
c. On obtient le tableau suivant.

x	0,1		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	1	↘	

La fonction f admet un maximum pour $x = 1$; ce maximum est égal à 1.

d. L'allure de la courbe est la suivante.

La courbe admet :
– en un point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;
– en son point d'abscisse 0,2 une tangente de coefficient directeur égal à $f'(0{,}2)$ soit à 4.
– en son point d'abscisse 1,5, une tangente de coefficient directeur égal à $f'(1{,}5)$ soit à $-\frac{1}{3}$.



BILAN

1. Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant complète le tableau des dérivées des fonctions élémentaires donné tome 1 page 68.

Fonction	Fonction dérivée	Intervalle de définition
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty ; +\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty ; +\infty[$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$]-\infty ; +\infty[$
a et b constantes réelles $x \mapsto e^{ax+b}$	a et b constantes réelles $x \mapsto a\,e^{ax+b}$	$]-\infty ; +\infty[$

2. Dérivée d'un produit, d'un inverse, d'un quotient

Les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I.

- **Dérivée de uv**

Si pour tout x de I, $f(x) = u(x)\,v(x)$ alors $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$.

- **Dérivée de $\frac{1}{u}$**

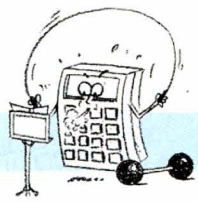
On suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I.

Si pour tout x de I, $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ alors $f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$.

- **Dérivée de $\frac{u}{v}$**

On suppose que la fonction v ne s'annule pas sur I.

Si pour tout x de I, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ alors $f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$.



POUR S'ENTRAÎNER

Fonctions logarithmes et exponentielles

EXERCICE 1

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{x}{2} - \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

2. $f : x \mapsto x + e^x$ sur $\mathbb{R}$.

3. $f : x \mapsto -2x + 3 + 0{,}5\, e^{0{,}5x}$ sur $\mathbb{R}$.

4. $f : x \mapsto \frac{x^3}{4} + 2x - 5 \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 2

Sachant que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$, déterminer la fonction dérivée de la fonction log sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 3

Sachant que pour tout x réel, on a la relation $10^x = e^{x \ln 10}$, déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto 10^x$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthogonal d'origine O.

1. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 1 ?

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point B d'abscisse e ?
Indiquer les coordonnées de B et le coefficient directeur de la droite (OB).
Interpréter les résultats obtenus.

3. Dans le repère choisi, placer A et B ; tracer les tangentes en A et en B à $\mathscr{C}$ et donner l'allure de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Fonction sinus

EXERCICE 5

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction sinus dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

1. Quel est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe en son point A d'abscisse 0 ?

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente (U) à la courbe en son point B d'abscisse $\frac{\pi}{2}$?

3. Dans le repère choisi, placer les points A et B et construire les droites (T) et (U).
Tracer l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Dérivées de uv, $\frac{1}{u}$, $\frac{u}{v}$

EXERCICE 6

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

2. $f : x \mapsto x \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

3. $f : t \mapsto \sin t \times \cos t$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. $f : x \mapsto \cos^2 x$ sur $[-\pi ; \pi]$.

5. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$ sur $[-2 ; 1[$.

6. $f : x \mapsto \frac{2x-5}{4x+3}$ sur $[0 ; +\infty[$.

7. $f : x \mapsto \frac{2350x}{x+4650}$ sur $[0 ; 10]$.

8. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 7

On considère les fonctions f suivantes définies sur un intervalle I.
Pour chacune d'elles, déterminer la fonction dérivée f'.

1. I $=]-\infty ; -10[$ $\quad f(x) = \frac{-5}{2x+3}$.

2. I $=]-\infty ; 1[$ $\quad f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{1-x}$.

3. I $=]0 ; +\infty[$ $\quad f(x) = \frac{1-3x}{2x+1}$.

4. I $=]0 ; +\infty[$ $\quad f(x) = -3x^2 + \frac{x}{2} + x \ln x$.

5. I $=]0 ; +\infty[$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} + x^2 \ln x$.

EXERCICE 8

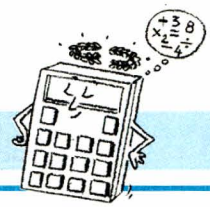
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$.

1. Déterminer la dérivée f' de f.

2. Indiquer, pour tout x de $[0 ; 2]$ le signe de $f'(x)$.

3. Donner le tableau de variation de f.

4. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
Construire la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 et donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.



LE JOUR DU BAC

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par $x \mapsto x - 3 + 2\,e^{-\frac{x}{2}}$.

1. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs arrondies au centième).

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$							

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x, $e^{-\frac{x}{2}} = 1$.

b. Montrer que pour tout x réel strictement positif, on a : $e^{-\frac{x}{2}} < 1$.

4. Étudier sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f. En déduire la valeur minimum prise par f.

5. On considère un repère orthogonal dont les unités graphiques sont :
en abscisse 2 cm, en ordonnée 4 cm.
Tracer dans ce repère les tangentes à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en ses points d'abscisse 0 et 1 puis la courbe $\mathscr{C}$.

Solution

1. On obtient le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,44	$-0,70$	-1	$-0,79$	$-0,26$	0,45	1,14

2. En posant, pour tout x de l'intervalle $[-2 ; 4]$: $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2\,e^{-\frac{x}{2}}$, on a :
$f(x) = u(x) + v(x)$ d'où $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
$u(x) = x - 3$ d'où $u'(x) = 1$;
$v(x) = 2\,e^{-\frac{x}{2}}$; la dérivée de $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ d'où $v'(x) = 2\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) = -e^{-\frac{x}{2}}$.

On obtient alors : $f'(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$. $f'(0) = 0$; $f'(1) \approx 0,39$.

3. a. Dans $\mathbb{R}$, $e^{-\frac{x}{2}} = 1$ équivaut à $\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) = \ln 1$ c'est-à-dire à : $-\frac{x}{2} = 0$.

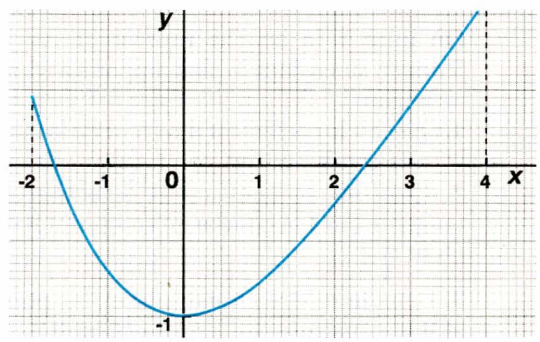
L'équation $e^{-\frac{x}{2}} = 1$ possède sur $\mathbb{R}$ une unique solution : 0.

b. Si $x > 0$ alors $-\frac{x}{2} < 0$ et si $-\frac{x}{2} < 0$ alors $e^{-\frac{x}{2}} < e^0$ (propriété de la fonction exponentielle) donc : si $x > 0$, alors $e^{-\frac{x}{2}} < 1$.

3. En utilisant les résultats de la question précédente, on obtient le tableau ci-contre.
La fonction f présente un minimum en 0 ; ce minimum est $f(0)$ soit -1.

x	-2		0		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-5 + 2e$	↘	-1	↗	$1 + e^{-2}$

5. Au point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$: tangente parallèle à $(0x)$; au point d'abscisse 1 : tangente de cœfficent directeur 0,39 (valeur arrondie au centième). La figure ci-contre donne l'allure de la courbe.



POUR APPROFONDIR

PROBLÈME 1 — BAC PRO

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [1,5 ; 10] par $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. Indiquer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I et donner le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

3. Soit un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : en abscisse 1 cm, en ordonnée 5 cm. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans ce repère de la fonction f.

a. Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse 3. Tracer cette tangente.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

PROBLÈME 2

Un générateur de f.e.m 20 volts, de résistance interne 0,5 Ω débite dans une résistance variable x (en Ω). La puissance P (en W) dissipée dans la résistance est égale à $\dfrac{400x}{(0{,}5+x)^2}$.

On considère la fonction f définie pour tout x de [0 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{400x}{(0{,}5+x)^2}$.

1. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout x de [0 ; + ∞[, $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x$.

2. Donner le tableau de variation de f et en déduire que f présente un maximum pour une valeur de x que l'on précisera.

Interpréter ce résultat pour le montage électrique proposé.

PROBLÈME 3 — BAC PRO

Le couple de démarrage C, exprimé en N.m, d'un moteur asynchrone triphasé est donné en fonction du glissement g par :

$$C = 1\,000\,\frac{g}{1+25g^2}$$

On se propose d'étudier ce couple en fonction du glissement. Pour cela, on considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(g) = 1\,000\,\frac{g}{1+25g^2}$$

1. Vérifier que la fonction f a pour dérivée la fonction f' définie par :

$$f'(g) = 1\,000 \times \frac{1-25g^2}{(1+25g^2)^2}$$

En déduire le tableau de variation de f.

2. Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : en abscisse 10 cm, en ordonnée 1 cm pour 10 N.m, tracer la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f.

3. Le moteur étant complètement démarré, on suppose que le glissement vaut 0,02, calculer le couple C_g correspondant (couple nominal).

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer cette tangente dans le repère précédent.

PROBLÈME 4

1. Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par : $x \mapsto \ln(2x)$.

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien, exprimer $f(x)$ en fonction de $\ln x$.

En déduire l'expression de la dérivée f' de f.

2. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur]0 ; + ∞[.

$g : x \mapsto \ln(4x)$; $h : x \mapsto \ln(7x)$

$k : x \mapsto \ln(4x) \times \ln(7x)$.

PROBLÈME 5 — BAC PRO

Première partie

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'axes Ox, Oy d'unité graphique 10 cm.

Dans ce repère :

1. Tracer la représentation graphique de la fonction logarithme népérien pour : $0{,}25 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Tracer la droite d'équation $y = -2x$.

3. Donner, en utilisant des procédures graphiques, l'allure de la courbe représentative de la fonction f définie sur [0,25 ; 1] par $f(x) = \ln x - 2x$.

Le tracé obtenu laisse supposer que la fonction f présente un maximum. Par simple lecture graphique, proposer une valeur pour ce maximum.

Deuxième partie. Étude de la fonction f

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

2. Résoudre, dans l'intervalle [0,25 ; 1] l'équation $f'(x) = 0$ et l'inéquation $f'(x) > 0$ (on tiendra compte du fait que sur l'intervalle [0,25 ; 1] tout nombre est strictement positif).

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. En déduire que la fonction f possède un maximum. Quelle est la valeur exacte de ce maximum ?

PROBLÈME 6 ●●

On considère la fonction f définie sur [0 ; 4] par $f(x) = 1{,}58\,(1 - e^{-x})$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm.

1. Calculer la dérivée f' de f.

2. Étudier le sens de variation de f sur [0 ; 4].

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

(On fera figurer les tangentes à $\mathscr{C}$ en ses points d'abscisse : 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.)

PROBLÈME 7 BAC PRO

Première partie

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm.

1. Dans ce plan, tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ considérée sur l'intervalle [– 1 ; 1,5].

2. Dans ce même repère, tracer la droite d'équation $y = 1 - 2x$.

3. Donner, en utilisant des procédures graphiques, l'allure de la courbe représentative de la fonction f, définie sur l'intervalle [– 1 ; 1,5], par $f(x) = 1 - 2x + e^x$.

Le tracé obtenu laisse supposer que la fonction f présente un minimum. Par simple lecture graphique, proposer une valeur pour ce minimum.

Deuxième partie

1. Résoudre, dans l'intervalle [– 1 ; 1,5], l'équation $e^x = 2$.

2. Montrer que sur l'intervalle [– 1 ; 1,5], les inéquations $e^x > 2$ et $x > \ln(2)$ sont équivalentes.

Troisième partie

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. Résoudre dans l'intervalle [– 1 ; 1,5], l'équation $f'(x) = 0$ et l'inéquation $f'(x) > 0$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4. En déduire que f possède un minimum. Quelle est la valeur exacte de ce minimum ?

PROBLÈME 8 BAC PRO ✔

On considère un circuit électrique comportant un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts), une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys) et un interrupteur.

Au bout du temps t (exprimé en secondes), après la fermeture de l'interrupteur, l'intensité (exprimée en ampères) est donnée par l'expression :

$i = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ (régime transitoire).

1. On donne $E = 5$ (volts), $R = 10$ (ohms), $L = 0{,}2$ (henrys).

Montrer que l'on a : $i = 0{,}5\,(1 - e^{-50t})$.

2. Soit f la fonction définie sur [0 ; + ∞[par $x \mapsto 0{,}5\,(1 - e^{-50x})$.

Montrer que pour tout x de [0 ; + ∞[, on a $f(x) \geqslant 0$.

3. Calculer la différence $0{,}5 - f(x)$ et montrer que quel que soit x de [0 ; + ∞[cette différence est strictement positive.

En déduire que, pour tout x positif, on a $f(x) < 0{,}5$.

4. Déterminer le réel x_1, tel que $f(x_1) = 0{,}25$. On donnera la valeur arrondie au dix millième.

5. Déterminer la fonction dérivée f' de f. En déduire que f est croissante.

6. Calculer $f(0{,}1)$. En déduire que pour $x > 0{,}1$, on a : $0{,}496 < f(x) < 0{,}5$.

7. Le plan est rapporté à un repère orthogonal dont les unités graphiques sont : en abscisse 100 cm, en ordonnée 20 cm.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère pour $0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$.

a. Calculer $f'(0)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite D d'équation $y = f'(0) \times x$ et de la droite D' d'équation $y = 0{,}5$.

b. Calculer $f(0{,}05)$ et $f'(0{,}05)$.

c. Tracer les droites D et D' et, en utilisant les résultats précédents et des valeurs particulières de $f(x)$, donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

2

CALCUL INTÉGRAL

Objectifs

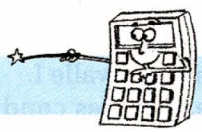
- **Savoir déterminer une primitive d'une fonction usuelle.**
- **Savoir, à l'aide d'une primitive, calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle.**
- **Savoir utiliser le calcul intégral pour le calcul de certaines aires planes.**

Pour prendre un bon départ

On considère les fonctions F suivantes dérivables sur l'intervalle I :

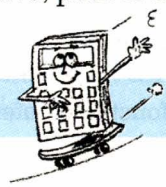
$F_1 : x \mapsto x^2$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$
$F_2 : x \mapsto 3x + 5$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$
$F_3 : x \mapsto x^2 - 4$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$
$F_4 : x \mapsto 2 \ln x + x$; $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$
$F_5 : x \mapsto x^2 + 5$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$
$F_6 : x \mapsto e^x + \sin x$; $\quad$ I = $\mathbb{R}$
$F_7 : x \mapsto 5x^2 - 3x + 4 \ln x$; $\quad$ I = $]0 ; +\infty[$.

Pour chacune de ces fonctions, déterminer la fonction dérivée.



Posons le problème

- Nous savons déterminer la fonction dérivée d'une fonction usuelle. Nous allons apprendre à déterminer dans des cas simples, par lecture inverse du tableau des dérivées, une fonction dont la fonction dérivée est une fonction connue f.
- Nous apprendrons ensuite à calculer l'intégrale de cette fonction f sur un intervalle et à utiliser ce résultat, si la fonction f est positive, pour le calcul de certaines aires planes.



Activités et résultats

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

On considère les fonctions F suivantes dérivables sur l'intervalle I.

I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$	$\mathbb{R}$
F	$F_1 : x \mapsto x^2$	$F_2 : x \mapsto 3x + 5$	$F_3 : x \mapsto x^2 - 4$	$F_4 : x \mapsto 2 \ln x + x$	$F_5 : x \mapsto x^2 + 5$

Pour chacune de ces fonctions, on a déterminé, dans l'activité préparatoire, la fonction dérivée ; cette fonction dérivée figure dans la liste suivante :

$f_1 : x \mapsto 3$; $f_2 : x \mapsto 2x$; $f_3 : x \mapsto \frac{2}{x} + 1$.

Compléter le tableau suivant en notant pour chaque fonction F sa fonction dérivée.

Fonction F	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
Fonction dérivée			f_2		

Que remarque-t-on concernant les fonctions dérivées des fonctions F_1, F_3, F_5 ?

Faisons le point

Une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, si pour tout x de I, on a $F'(x) = f(x)$.
Dire que F est une primitive de f sur I, c'est dire que f est la fonction dérivée de F sur I.

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x$. D'après le tableau obtenu précédemment, les fonctions $x \mapsto x^2 - 4$ et $x \mapsto x^2 + 5$ sont aussi des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, considérons la fonction $G : x \mapsto x^2 + c$; c nombre réel.
On a : $G(x) = F(x) + c$ d'où : $G'(x) = F'(x)$
c'est-à-dire : $G'(x) = f(x)$.

Ainsi toute fonction $G : x \mapsto x^2 + c$, c réel, est une primitive de $f : x \mapsto 2x$.

Faisons le point

Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I, alors la fonction G définie sur I par $x \mapsto F(x) + c$, c nombre réel donné, est aussi une primitive de f sur l'intervalle I.
On admettra que, dans les conditions précédentes, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions $G : x \mapsto F(x) + c$; c étant un nombre réel quelconque.

Applications directes

- On a vu, dans l'activité préparatoire, que la fonction F définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $x \mapsto 5x^2 - 3x + 4 \ln x$ a pour fonction dérivée la fonction $f : x \mapsto 10x - 3 + \frac{4}{x}$.

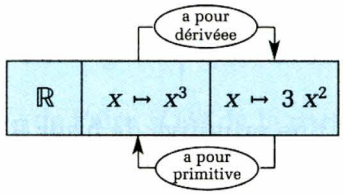
  Donc, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ les primitives de $f : x \mapsto 10x - 3 + \frac{4}{x}$ sont les fonctions $G : x \mapsto 5x^2 - 3x + 4 \ln x + c$; c nombre réel quelconque.
- Pour chaque fonction f obtenue dans le tableau précédent, déterminer toutes les fonctions primitives.

2. Recherche de primitives

Utilisation directe du tableau des dérivées

Considérons un extrait du tableau des dérivées donné dans le formulaire d'examen auquel on a ajouté pour chaque fonction l'intervalle I d'utilisation.

On lit que, sur $\mathbb{R}$:
la fonction $x \mapsto x^3$ a pour fonction dérivée la fonction $x \mapsto 3x^2$
donc, sur $\mathbb{R}$:
$x \mapsto 3x^2$ est **une** primitive de $x \mapsto x^3$.
On peut retenir le schéma de lecture suivant :

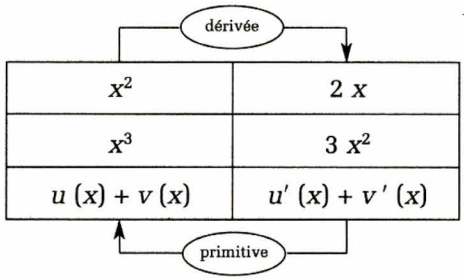


I	Fonction f $f(x)$	Dérivée f' $f'(x)$
$\mathbb{R}$	$ax + b$	a
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
$]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$

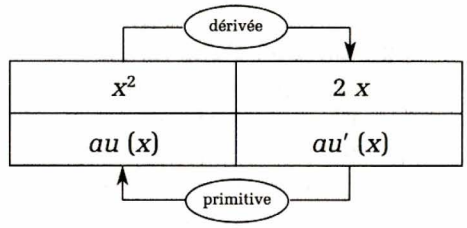
On en déduit **toutes** les primitives de la fonction $f : x \mapsto 3x^2$ sur $\mathbb{R}$; ce sont les fonctions G : $x \mapsto x^3 + c$, où c est un réel quelconque.
Plus généralement, par lecture inverse du tableau, on peut déterminer pour chaque fonction de la dernière colonne, **une** primitive.
Par lecture inverse du tableau, déterminer une primitive, puis donner toutes les primitives des fonctions suivantes :
$f : x \mapsto 2e^{2x+1}$; $g : x \mapsto \sin x$.

Primitives de la somme de deux fonctions et du produit d'une fonction par un nombre
Considérons dans le tableau des dérivées donné dans le formulaire, les lignes suivantes :

(1)



(2)



On en déduit :
– dans le cas (1) que $x \mapsto x^2 + x^3$ est une primitive de $x \mapsto 2x + 3x^2$;
– dans le cas (2) que $x \mapsto ax^2$ est une primitive de $x \mapsto a(2x)$.

Faisons le point

Sur l'intervalle I
- Si F est une primitive de f et si G est une primitive de g, alors la fonction : $x \mapsto F(x) + G(x)$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto f(x) + g(x)$.
- Si F est une primitive de f, alors, pour tout réel k, la fonction : $x \mapsto kF(x)$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto kf(x)$.

Application directe

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$.
b. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto 3x + 2x^2$.

a. Primitive de f
On lit dans le tableau des dérivées, que $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$.
On écrit : $f(x) = \frac{1}{2}(2x)$, donc :

la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2} x^2$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2} (2x)$ c'est-à-dire de f.

Primitive de g

On lit dans le tableau des dérivées, que $x \mapsto x^3$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2$.

On écrit : $g(x) = \frac{1}{3} (3x^2)$, donc :

la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{3} x^3$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{3} (3x^2)$ c'est-à-dire de g.

b. On a $h(x) = 3f(x) + 2g(x)$, donc la fonction $H : x \mapsto 3F(x) + 2G(x)$ est une primitive de h.

E_1 à E_3 La fonction $H : x \mapsto 3 \frac{x^2}{2} + 2 \frac{x^3}{3}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

Des réflexes à avoir

Après toute recherche de primitive d'une fonction donnée, on valide le résultat en dérivant la fonction primitive obtenue. Vérifier que $H'(x) = h(x)$

3. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Définition. Interprétation géométrique

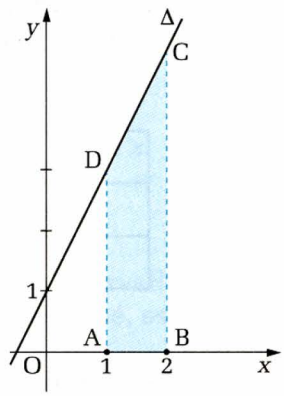
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.

Soit, dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, la droite Δ courbe représentative de la fonction f.

a. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
Calculer le nombre $F(2) - F(1)$.

b. Déterminer une autre primitive G de f sur $\mathbb{R}$.
Calculer le nombre $G(2) - G(1)$. Que remarque-t-on ?

c. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm², du trapèze ABCD.



On constate que $F(2) - F(1) = G(2) - G(1) = \mathcal{A}$.

Plus généralement, soient deux primitives F et G de la fonction f sur l'intervalle I.

On sait, d'après le paragraphe 1, que G est de la forme :

$$G(x) = F(x) + c, \qquad c \text{ nombre réel.}$$

Si a et b sont deux nombres de l'intervalle I, on a :

$$G(b) = F(b) + c$$
$$G(a) = F(a) + c$$

d'où, par soustraction, $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Le nombre obtenu ne dépend que de la fonction f et des nombres a et b.

Faisons le point

a. Définition

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I ; si a et b sont deux nombres de I, on appelle intégrale de a à b de la fonction f le nombre $F(b) - F(a)$.

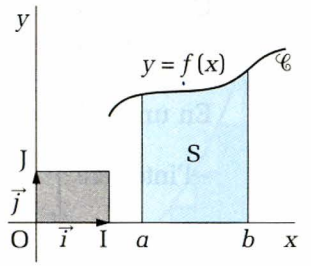
On le note : $\int_a^b f(x)\, dx$; on lit « somme de a à b de $f(x)\, dx$ ».

On écrit : $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ ou $\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b$.

On peut aussi écrire : $\int_a^b f(t)\, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

b. Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction positive avec $a \leqslant b$

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
L'unité d'aire notée *ua* est l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].
$\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de f.



L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est la mesure en unité d'aire de l'aire $\mathscr{A}(S)$ de la partie ombrée S du plan, ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ tels que : $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

$$\mathscr{A}(S) = \int_a^b f(x)\,dx \text{ (unités d'aire)}$$

Applications directes

Pour calculer une intégrale, on détermine tout d'abord une primitive de la fonction à intégrer.

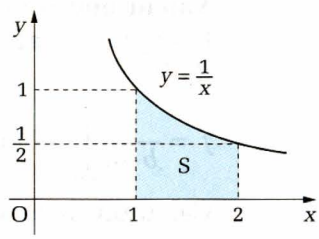
a. Calcul de $I = \int_{-2}^{1} (3t^2 - 1)\,dt$. $I = [t^3 - t]_{-2}^{1} = (1 - 1) - (-8 + 2) = 0 - (-6) = 6$.

b. Calcul de $J = \int_{-1}^{1} (3e^t - 2t)\,dt$.

$J = [3e^t - t^2]_{-1}^{1} = (3e - 1) - (3e^{-1} - 1) = 3\left(e - \frac{1}{e}\right)$; $J \approx 7{,}05$.

c. Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, de la surface S délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ (partie coloriée du plan).
Exprimer cette aire en cm².



En unité d'aire :

$\mathscr{A} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$ *ua* ; $\mathscr{A} \approx 0{,}69$ *ua*.

L'unité d'aire est égal à 4 cm², donc, en cm² :
$\mathscr{A} = 4 \times \ln 2$ cm² ; $\mathscr{A} \approx 2{,}77$ cm² (valeur arrondie au mm²).

Propriétés

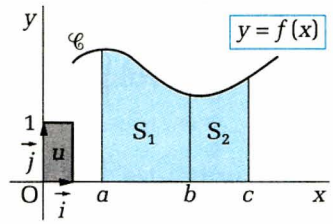
Si les fonctions f et g admettent sur l'intervalle I des primitives, si a, b, c désignent trois nombres de I et k un nombre donné, on admettra les propriétés suivantes.

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \; ; \; \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

Interprétation géométrique de la relation de Chasles

On suppose que la fonction f est **positive** et que $a \leqslant b \leqslant c$.
Soit dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = f(x)$.



En unité d'aire :

– l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est la mesure de l'aire $\mathscr{A}_1$ de la surface S_1 ;

– l'intégrale $\int_b^c f(x)\,dx$ est la mesure de l'aire $\mathscr{A}_2$ de la surface S_2 ;

– l'intégrale $\int_a^c f(x)\,dx$ est la mesure de l'aire $\mathscr{A}$ de la surface S délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = c$.

On a $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$.

Applications directes

E$_4$ à E$_6$

Calculer $I = \int_1^2 \left(\frac{2}{t} - 6t\right) dt$.

On écrit $\int_1^2 \left(\frac{2}{t} - 6t\right) dt = 2\int_1^2 \frac{dt}{t} - 3\int_1^2 (2t)\,dt$

d'où, d'après le tableau donné dans le formulaire, $I = 2\,[\ln t]_1^2 - 3\,[t^2]_1^2$
soit $I = 2 \ln 2 - 3\,(4 - 1) = 2 \ln 2 - 9$; $I \approx -7{,}61$.

4. Valeur moyenne d'une fonction. Calcul approché d'une intégrale

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

On appelle **valeur moyenne** d'une fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ le nombre noté $\overline{f}$ défini par

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

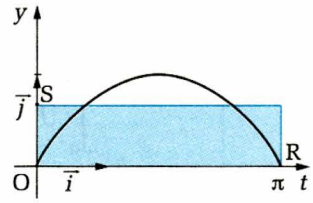
Calculons la valeur moyenne sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ de la fonction sinus : $t \mapsto \sin t$.

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{\pi}[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi}$$

Interprétation géométrique

La mesure K en unité d'aire de l'aire de « l'arche de sinusoïde » surface délimitée par l'arc de sinusoïde et l'axe des abscisses est donnée par :

$$K = \int_0^{\pi} \sin t\,dt\ .$$



On a $K = \overline{f} \times \pi$; K est aussi la mesure, en unité d'aire de l'aire du rectangle de côtés [OR] et [OS] tels que

$\overrightarrow{OR} = \pi\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{OS}\ \overline{f}\,\vec{j}$.

Calcul numérique approché d'une intégrale

En unité d'aire, la mesure de l'aire de l'ensemble des points M $(x ; y)$ du plan tels que :
$1 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant x^3$

est donnée par $I = \int_1^2 x^3 \, dx$.

Le formulaire ne nous permet pas de trouver une primitive de $x \mapsto x^3$, donc de calculer cette intégrale.
Considérons les cinq rectangles de largeur commune 0,2 représentés sur la figure a.

La somme s des mesures des aires en unité d'aire, de ces rectangles donne une valeur approchée (ici par défaut) de I.
Vérifier que $s = 0{,}2\,(f(1) + f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1{,}8))$.

En déduire que $s = 3{,}08$; on a donc $\int_0^1 x^3 \, dx \approx 3{,}08$.

En considérant les cinq rectangles de largeur commune 0,2 représentés figure b, déterminer une valeur approchée (ici par excès) de I.
En déduire que $3{,}08 < I < 4{,}48$.

La méthode utilisée est appelée *méthode des rectangles.*
Un calcul de la valeur exacte de I est proposé au problème 6.

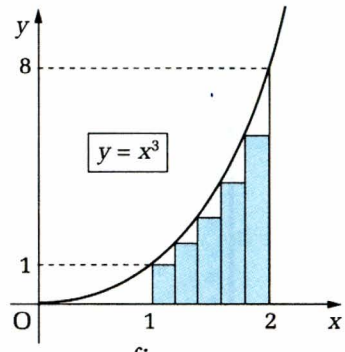


figure a

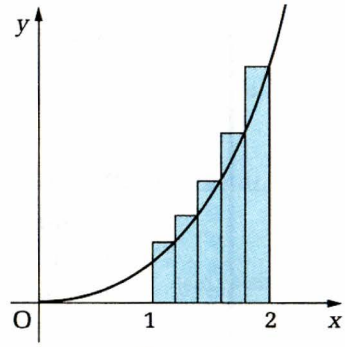


figure b

BILAN

1. Primitives d'une fonction

Définition

Une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, si, pour tout réel x de I, on a $F'(x) = f(x)$.

Propriétés

- Si une fonction f admet sur l'intervalle I une primitive F, toutes les primitives de f sur I sont les fonctions : $x \mapsto F(x) + c$ où c est un nombre réel quelconque.
- Sur l'intervalle I,
  – si F est une primitive de f et si G est une primitive de g, alors la fonction : $x \mapsto F(x) + G(x)$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto f(x) + g(x)$;
  – si F est une primitive de f, alors, pour tout réel k, la fonction : $x \mapsto kF(x)$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto kf(x)$.

2. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Définition

Si, sur l'intervalle I, la fonction f admet une primitive F, alors, a et b étant des nombres de I :

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

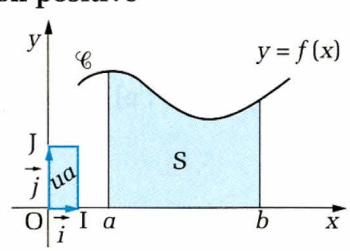
Interprétation géométrique pour une fonction positive

Dans un repère orthogonal, on considère l'ensemble S des points M $(x ; y)$ tels que :

$a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

La mesure de l'aire de S est, en unité d'aire :

$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b f(x)\,dx \ ua$$



Unité d'aire noté ua : aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].

Propriétés

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt \qquad \text{(relation de Chasles)}$$

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \ ; \ \int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt \ ; \ k \text{ réel.}$$

POUR S'ENTRAÎNER

Calcul de primitives

Dans toute recherche de primitive, on a intérêt à valider le résultat en dérivant la fonction obtenue.

EXERCICE 1

Déterminer les primitives de chacune des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = 4x - 3$; $f(x) = -x + 5$.

2. $f(x) = x^2 - 4x$; $f(x) = 1{,}5x^2 - 3x + 4$.

3. $f(x) = (x-1)^2$; $f(x) = x(x+1)$.

EXERCICE 2

Déterminer les primitives des fonctions f suivantes définies sur l'intervalle I par :

1. $f(x) = -\dfrac{4}{x^2}$; $I =]-\infty ; 0[$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$.

3. $f(x) = \dfrac{5}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

4. $f(x) = e^x + e^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = x + 5e^x$; $I = \mathbb{R}$.

6. $f(x) = e^{2x}$; $I = \mathbb{R}$.

7. $f(x) = 2e^{-3x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

8. $f(x) = \cos x + \sin x$; $I = \mathbb{R}$.

9. $f(x) = \sin(2x)$; $I = \mathbb{R}$.

10. $f(x) = \cos(3x - 1)$; $I = \mathbb{R}$.

11. $f(x) = 4\sin(2x + 3)$; $I = \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la primitive F qui satisfait à la condition donnée.

1. $f(x) = 4x - 3$; $F(0) = 0$.

2. $f(x) = 3x^2 - 5x$; $F(1) = 1$.

3. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $F(1) = 0$.

4. $f(x) = 2x + e^x$; $F(0) = -1$.

5. $f(x) = 2\sin x$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

6. $f(x) = 4\cos 3x$; $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

Calcul d'intégrales à l'aide d'une primitive

EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 (3x-1)\,dx$; $J = \int_0^3 (2t+4)\,dt$.

2. $I = \displaystyle\int_{-1}^2 (t^2+3t-1)\,dt$; $J = \int_{-1}^1 (x+2)^2\,dx$.

3. $I = \displaystyle\int_1^2 \left(2x+1-\frac{2}{x}\right)dx$; $J = \int_1^2 \left(4x-5+\frac{3}{x^2}\right)dx$.

4. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx$; $J = \int_0^{\ln 2} (e^t + e^{2t})\,dt$.

5. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,dt$; $J = \int_0^{\pi} \cos t\,dt$.

6. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)\,dt$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \sin 2x)\,dx$.

Calcul d'aires

EXERCICE 5

Pour chacune des fonctions f suivantes, on note, dans un repère orthonormal, S la surface ensemble des points M $(x ; y)$ tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

Dans chaque cas, tracer l'allure de la courbe représentative, colorier la surface S et calculer, en unité d'aire, l'aire de cette surface.

1. $f(x) = x^2$; $a = 0$; $b = 2$.

2. $f(x) = 2x^2 + 1$ $a = 0$; $b = 1$.

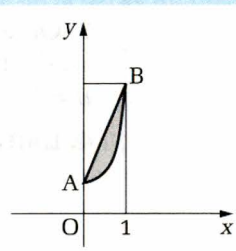
3. $f(x) = -x^2 + 4$; $a = -2$; $b = 2$.

4. $f(x) = e^{2x}$; $a = 0$; $b = 1$.

5. $f(x) = \sin x$; $a = 0$; $b = \pi$.

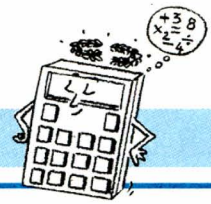
EXERCICE 6

On considère dans un repère orthonormal, la surface S délimitée par l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ et le segment [AB].



L'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto e^x$ sur l'intervalle [0 ; 1].

Calculer en unité d'aire la mesure de l'aire de S.



LE JOUR DU BAC

Énoncé

On considère la tension u dont l'expression (en volts) en fonction du temps t (en secondes) est donnée, pour $t \geqslant 0$, par :

$u(t) = 5\,(1 - e^{-at})$ avec $a = 10^3$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de u dans un repère orthogonal (Ot, Ou). (Unités graphiques : en abscisse 2 cm pour 10^{-3} s ; en ordonnée 2 cm pour 1 V.)

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction $u : t \mapsto 5\,(1 - e^{-at})$.

2. Étudier sur l'intervalle $I = [0 ; 5 \cdot 10^{-3}]$ le signe de la fonction dérivée de u.
Donner le tableau de variation de u sur l'intervalle I.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

4. Tracer dans le repère indiqué la droite (T) et l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ obtenu pour t appartenant à l'intervalle I.

5. Calculer l'intégrale $K = \int_0^{5 \cdot 10^{-3}} u(t)\,dt$. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-2}.
Que représente géométriquement cette intégrale ?

6. Déterminer la valeur moyenne $\overline{u}$, de la fonction u sur l'intervalle I.

Commentaire

• Pour la détermination de la dérivée de u et pour le calcul de l'intégrale K, on a intérêt, par commodité d'écriture à conserver la lettre a et à la remplacer en fin de calcul par sa valeur numérique 10^3.

• Pour préciser le tracé de l'arc de la courbe $\mathscr{C}$, on déterminera en utilisant éventuellement une calculatrice programmable, des valeurs approchées de $u(t)$ pour les valeurs suivantes de t : 10^{-3} ; $2 \cdot 10^3$; $3 \cdot 10^{-3}$; $4 \cdot 10^{-3}$; $5 \cdot 10^{-3}$.

• Pour calculer l'intégrale K, on détermine tout d'abord une primitive de la fonction à intégrer. Il y a lieu de valider ce résultat en dérivant la primitive obtenue, car toute la suite du problème en dépend.

Solution

1. On peut écrire : $u(t) = 5 - 5\,e^{-at}$ d'où : $u'(t) = (-5)(-a)\,e^{-at}$
c'est-à-dire : $u'(t) = 5 \cdot 10^3\,e^{-10^3 t}$.

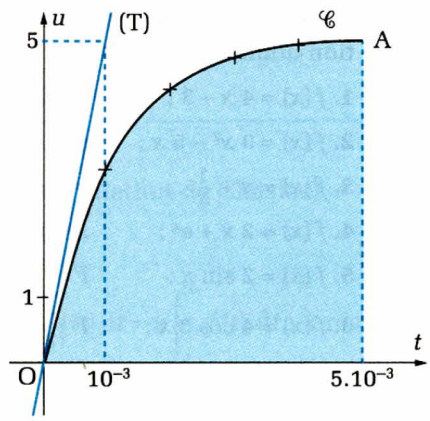
2. Pour tout t de l'intervalle I, on a $e^{-10^3 t} > 0$ donc $u'(t) > 0$ d'où le tableau suivant :

t	0		$5 \cdot 10^{-3}$
$u'(t)$		+	
$u(t)$		↗	

$u(0) = 0$; $u(5 \cdot 10^{-3}) \approx 4{,}97$.

3. On a : $u'(0) = 5 \cdot 10^3$ et $u(0) = 0$.
La droite (T) a donc pour équation : $u = 5 \cdot 10^3\,t$.

4. L'allure du tracé est la suivante :



5. On a : $K = \int_0^{5\cdot10^{-3}} 5(1-e^{-at})\,dt = 5\int_0^{5\cdot10^{-3}} (1-e^{-at})\,dt$.

Déterminons une primitive de la fonction $g : t \mapsto (1 - e^{-at})$.
Une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{-a} e^{-at}$ donc la fonction $G : t \mapsto t + \frac{1}{a} e^{-at}$ est une primitive de g.

Ainsi : $K = 5\left[t + 10^{-3} e^{-10^3 t}\right]_0^{5\cdot10^{-3}}$

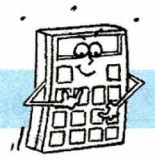
soit : $K = 5\left[(5\cdot10^{-3} + 10^{-3} e^{-5}) - (0 + 10^{-3})\right]$
$K = 5(4\cdot10^{-3} + 10^{-3} e^{-5}) = 5\cdot10^{-3}(4 + e^{-5})$
$K \approx 20 \times 10^{-3}$ ou $K \approx 2\cdot10^{-2}$.

L'intégrale K, est la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par l'arc OA, l'axe des abscisses et la droite d'équation $t = 5\cdot10^{-3}$.
On peut remarquer que :
– en abscisse, l'unité est égale à $2\cdot10^3$ cm ;
– en ordonnée l'unité est égale à 2 cm ; donc l'unité d'aire est $4\cdot10^3$ cm².
Ainsi, l'aire, en cm², de la surface envisagée est $\mathcal{A} \approx 80$.

6. On a : $\overline{u} = \frac{1}{5\cdot10^{-3}} \int_0^{5\cdot10^{-3}} u(t)\,dt$

soit $\overline{u} = 2\cdot10^2 \times K$; $\overline{u} \approx 4$.

POUR APPROFONDIR

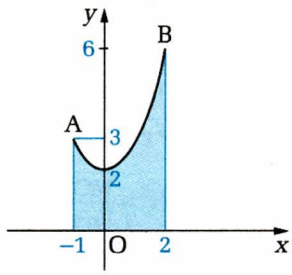


PROBLÈME 1 ●●

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm. L'arc AB est un arc d'une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$; a, b, c réels.

1. Montrer que l'équation de $\mathcal{P}$ est $y = x^2 + 2$.

2. Calculer, en cm², l'aire de la surface coloriée.



PROBLÈME 2 ●●

1. Tracer dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = \cos x$.
2. Construire dans le même repère la courbe représentative $\mathcal{C}'$ de la fonction g définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = 1 + \cos x$.
3. Calculer, en cm², l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}'$ et les axes de coordonnées.

PROBLÈME 3 ●●

On considère une intensité dont l'expression (en ampères) est donnée, en fonction du temps t, (en secondes) par : $i(t) = i_{max} \sin(\omega t)$; $\omega > 0$.
L'intensité efficace I est telle que :

$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^T i^2(t)\ dt$.

On rappelle que $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

2. En déduire que $I = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}}$.

PROBLÈME 4 ✔ ●●

Entre deux points d'un circuit RLC on applique une différence de potentiel u telle que, en volts : $u(t) = U\sqrt{2}\ \sin \omega t$; $\omega > 0$; t temps en secondes.
L'expression de l'intensité i du courant qui traverse le circuit est alors donnée par :
$i(t) = I\sqrt{2}\ \sin(\omega t - \varphi)$.
La puissance moyenne fournie sur une période au circuit est

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \times i(t)\ dt \quad \text{avec } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Sachant que, a et b étant deux réels donnés, $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$, calculer cette puissance moyenne.

PROBLÈME 5 ●●

On considère dans un repère orthogonal la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = x^3$.
On sait que l'intégrale $I = \int_1^2 x^3\ dx$ est la mesure en unité d'aire de l'aire de la surface coloriée (figure a). On se propose de déterminer une valeur approchée de I.

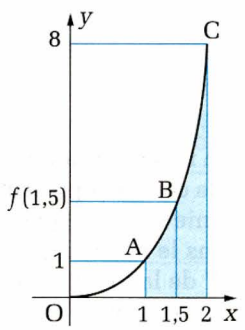


figure a

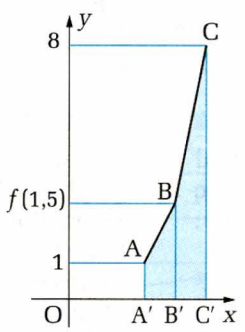


figure b

On considère sur la courbe les points A $(1 ; f(1))$, B $(1{,}5 ; f(1{,}5))$ et C $(2 ; f(2))$.
La somme des mesures s des aires des trapèzes ABB'A' et BCC'B' est une valeur approchée de I (figure b).

1. Montrer que $s = 0{,}5 \times \left[\frac{f(1)}{2} + f(1{,}5) + \frac{f(2)}{2}\right]$.

2. En déduire une valeur approchée de I.
La méthode utilisée ici est appelée méthode des trapèzes.

PROBLÈME 6 BAC PRO ✔

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^4$.
En écrivant que $f = u\ v$ avec $u : x \mapsto x^3$ et $v : x \mapsto x$, déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

2. En utilisant le résultat précédent, déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, de l'ensemble des points M $(x ; y)$ du plan tels que :

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant x^3.$$

PROBLÈME 7 BAC PRO ✔

Soit la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = xe^x$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1. Compléter en utilisant éventuellement une calculatrice programmable le tableau suivant ; on donnera les valeurs arrondies au centième.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$						

2. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
Donner le tableau de variation de f.

3. En utilisant les résultats précédents :
a. Donner l'allure de la courbe (C) ; on précisera la tangente à (C) en son point d'abscisse 0.
b. Calculer des valeurs approchées des sommes :
$s = 0{,}2\ [f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8)]$
$s' = 0{,}2\ [f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + f(1)]$.
Interpréter les nombres s et s' comme sommes des mesures d'aires de rectangles que l'on représentera sur la figure.

• Calculer le nombre $\frac{s + s'}{2}$ qui représente une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x\ dx$.

4. Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x - 1)\ e^x$.
En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^x\ dx$.

3

NOMBRES COMPLEXES

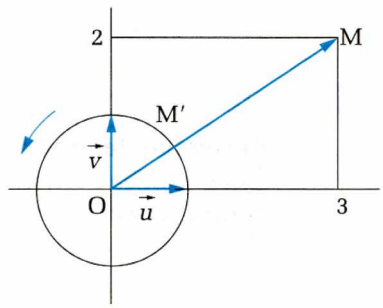
Objectifs

- **Maîtriser les règles de calcul dans l'ensemble des nombres complexes.**
- **Savoir utiliser la représentation géométrique d'un nombre complexe.**
- **Savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.**
- **Savoir utiliser les nombres complexes dans des situations issues de l'électricité ou de l'électronique.**

Pour prendre un bon départ

Norme d'un vecteur. Mesures d'angles orientés

Le plan est rapporté à un repère orthonormal positif $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère le point M de coordonnées (3 ; 2) et le cercle trigonométrique de centre O ; la demi-droite [OM) coupe le cercle trigonométrique en M′.



a. Calculer $\| \overrightarrow{OM} \|$.

b. Donner les valeur exactes des coordonnées de M′.

c. On note θ la mesure principale, en radian, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
Déterminer les valeurs exactes de cos θ et de sin θ.

d. Résoudre sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos x = \frac{3}{\sqrt{13}}$; on donnera les valeurs arrondies au centième des solutions.
En déduire la valeur arrondie au centième de θ.

e. Placer dans le repère donné le point N tel que ON = 3 et $(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{2\pi}{5}$.

Déterminer les valeurs exactes puis les valeurs arrondies au centième des coordonnées de N.

Eléments de réponse

a. $\| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{3^2 + 2^2}$; $\| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{13}$.

b. $\overrightarrow{OM'} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\| \overrightarrow{OM} \|}$ d'où les coordonnées de M′ : $\left(\frac{3}{\sqrt{13}} ; \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

c. L'abscisse de M′ est cos θ, l'ordonnée de M′ est sin θ ; donc, $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

d. Il existe un réel unique α tel que $0 < \alpha < \pi$ et $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.
Les solutions sur $]-\pi ; \pi]$ sont les nombres : α et $-\alpha$.
À la calculatrice, on effectue, en mode radian, la séquence :

3 [÷] 13 [√] [=] [2nd] [cos] ; on obtient $\alpha \approx 0{,}59$.

Valeurs arrondies des solutions : 0,59 et – 0,59.
On constate, géométriquement, que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; donc $\theta \approx 0{,}59$.

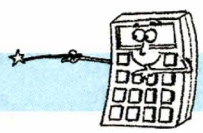
e. Pour placer N, on peut remarquer que $\frac{2\pi}{5}$ radians correspondent à 72 degrés.
Les coordonnées de N sont :

$3\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ et $3\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$,

c'est-à-dire $3\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $-3\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Valeurs arrondies des coordonnées de N : $x_N \approx 0{,}93$; $y_N \approx -2{,}85$.

Posons le problème



- Dans une première partie, ce chapitre donne et applique les règles de calcul utilisant la forme algébrique d'un nombre complexe.
- La représentation géométrique d'un nombre complexe par un point ou un vecteur permet ensuite de définir la forme trigonométrique. Les résultats relatifs à la forme trigonométrique d'un produit sont démontrés.
- Enfin ce chapitre fournit les éléments qui permettront l'utilisation des nombres complexes dans la résolution de problèmes spécifiques à l'électricité ou à l'électronique.

Activités et résultats

1. Ensemble des nombres complexes. Règles de calcul

Ensemble des nombres complexes

On admettra l'existence d'un ensemble de nombres de la forme $a + jb$ appelés **nombres complexes** où a et b désignent deux nombres réels et j un nombre tel que $j^2 = -1$.
Cet ensemble est noté $\mathbb{C}$. On écrit

$$\boxed{z = a + jb}$$

On dit que $a + jb$ est la **forme algébrique** du nombre complexe z. Le nombre réel a est la **partie réelle** de z ; le nombre complexe b est la **partie imaginaire** de z.
Tout nombre réel a peut s'écrire $a + 0j$ donc l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
Tout nombre complexe du type $z = jb$ est appelé **imaginaire pur**.

Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$:

- **L'égalité de deux nombres complexes :**

$$a + jb = a' + jb' \quad \text{équivaut à :} \quad a = a' \text{ et } b = b'.$$

- **Une addition et une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels avec $j^2 = -1$.**

Exemples

Soit les nombres complexes $z = 2 + 3j$ et $z' = 4 - j$.
Calculer les nombres $z + z'$; zz' ; z^2.

Résolution

- $z + z' = (2 + 3j) + (4 - j)$; $z + z' = (2 + 4) + (3 - 1)j$; $z + z' = 6 + 2j$.
- $zz' = (2 + 3j)(4 - j)$; $zz' = 8 - 2j + 12j - 3j^2$
  d'où, puisque $j^2 = -1$: $zz' = 8 + 3 + 10j$; $zz' = 11 + 10j$.
- $z^2 = (2 + 3j)^2$, d'où, en utilisant une identité remarquable connue :
  $z^2 = 4 + 12j + (3j)^2$, c'est-à-dire : $z^2 = 4 + 12j + 9j^2$
  d'où, puisque $j^2 = -1$: $z^2 = 4 - 9 + 12j$; $z^2 = -5 + 12j$.

Faisons le point

- **Somme de deux nombres complexes**
  $(a + jb) + (a' + jb') = a + a' + j(b + b')$.
- **Produit de deux nombres complexes**
  $(a + jb)(a' + jb') = aa' - bb' + j(ab' + a'b)$.

2. Nombres complexes conjugués. Inverse. Quotient

Nombres complexes conjugués

Soit $z = a + jb$ un nombre complexe ; le nombre complexe $a - jb$ est appelé **nombre complexe conjugué** de z ; on le note $\overline{z}$.
Par exemple si $z = 4 + 7j$ alors $\overline{z} = 4 - 7j$.
Deux nombres complexes conjugués ont même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

Remarques

On vérifie immédiatement que :

- z réel équivaut à $z = \overline{z}$.
- Si $z = a + jb$, alors $z + \overline{z} = 2a$ et $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Inverse d'un nombre complexe non nul

Déterminons l'inverse $\frac{1}{z}$ du nombre $z = 2 + 5j$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{2+5j}$.

Pour mettre $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique, multiplions les deux termes du quotient par le nombre conjugué $2 - 5j$ du dénominateur.

$\frac{1}{z} = \frac{2-5j}{(2+5j)(2-5j)}$; $\frac{1}{z} = \frac{2-5j}{4-25j^2}$ d'où $\frac{1}{z} = \frac{2-5j}{29}$; $\frac{1}{z} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}j$.

Quotient de deux nombres complexes

Calculons sous la forme $a + jb$ le quotient $Z = \frac{1-j}{3-2j}$.

Multiplions les deux termes du quotient par le nombre conjugué $3 + 2j$ du dénominateur.

$Z = \frac{1-j}{3-2j} = \frac{(1-j)(3+2j)}{(3-2j)(3+2j)}$; $Z = \frac{3-3j+2j-2j^2}{9-4j^2}$; $Z = \frac{5-j}{13}$; $Z = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}j$.

On pourra vérifier que $Z \times (3 - 2j) = 1 - j$.

Faisons le point

- Pour écrire sous forme algébrique $\frac{1}{a+jb}$ ($a \neq 0$ et $b \neq 0$), on multiplie les deux termes du quotient par le nombre conjugué $a - jb$ du dénominateur.
- Pour écrire sous forme algébrique $\frac{a+jb}{a'+jb'}$ ($a' \neq 0$ et $b' \neq 0$), on multiplie les deux termes du quotient par le nombre conjugué $a' - jb'$ du dénominateur.

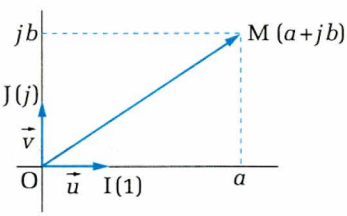
E_1 à E_3

3. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Définitions

Le plan est rapporté à un repère orthonormal positif $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout nombre $z = a + jb$, on peut associer le point M de coordonnées (a, b). Réciproquement, à tout point M de coordonnées $(a ; b)$ on peut associer le nombre $z = a + jb$ d'où les définitions suivantes :



$z = a + jb$
$\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$

- Le point M $(a ; b)$ est **l'image** du nombre complexe $z = a + jb$; on dit aussi que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image du nombre complexe z.
- Le nombre $z = a + jb$ est **l'affixe** du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- L'axe des abscisses est l'ensemble des images des nombres réels ($a + j0 = a$) ; on l'appelle **axe des réels**.
- L'axe des ordonnées est l'ensemble des images des nombres imaginaires purs ($0 + jb = jb$) ; on l'appelle **axe des imaginaires purs**.

Montrer que :
– deux nombres opposés ont des images symétriques par rapport au point O ;
– deux nombres conjugués ont des images symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Propriétés

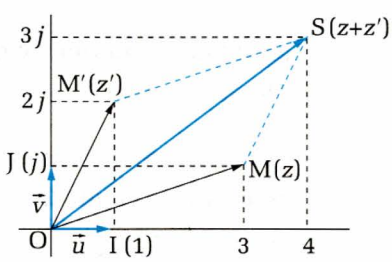
Soit M et M′ les images des nombres complexes $z = 3 + j$; $z' = 1 + 2j$.

Ainsi, $\overrightarrow{OM} = 3\vec{u} + \vec{v}$; $\overrightarrow{OM'} = \vec{u} + 2\vec{v}$.

Le nombre $Z = z + z'$ est tel que $Z = 4 + 3j$, son image S est définie par $\overrightarrow{OS} = 4\vec{u} + 3\vec{v}$;

on vérifie immédiatement que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

Calculer le nombre $Z'' = -\frac{5}{2}z$ et montrer que son image M'' est définie par $\overrightarrow{OM''} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{OM}$.



Faisons le point

Soit $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ les vecteurs images des nombres z et z' et k un nombre réel ;

- le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ est l'image de la somme $z + z'$;
- le vecteur $k\overrightarrow{OM}$ est l'image du nombre kz.

E_4 à E_6

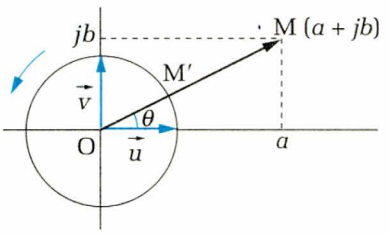
4. Module. Argument. Forme trigonométrique

Faisons le point

Définitions

Soit $z = a + jb$ un nombre complexe et M son image.

- On appelle **module** de z et on note $|z|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- Si $z \neq 0$, alors $\overrightarrow{OM} \neq \vec{0}$; on appelle dans ce cas **argument** de z et on note **arg** z toute mesure en mode radian, de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Remarques

Si θ est un argument z, tout nombre de la forme $\theta + k\,2\Pi$, k entier relatif est aussi un argument de z.

Parmi les arguments de z, on considère souvent la détermination principale de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$; par raison de commodité, on l'appelle argument principal de z et on la notera Arg z.

Ainsi, on a : $-\pi < \text{Arg } z \leqslant \pi$

Résultats utiles

- En pratique, on utilise les notations $\rho = |z|$ et $\theta = \arg z$ où θ désigne un argument de z.

Si M′ désigne le point où la demi-droite [OM) coupe le cercle trigonométrique de centre O,

$\overrightarrow{OM'} = (\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{v}$, d'où, puisque $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{OM'}$

$\overrightarrow{OM} = (\rho\cos\theta)\,\vec{u} + (\rho\sin\theta)\,\vec{v}$

comme $\overrightarrow{OM} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$, on obtient : $a = \rho\cos\theta$ et $b = \rho\sin\theta$.

Ainsi $\boxed{z = a + jb = \rho\,(\cos\theta + j\sin\theta)}$

L'écriture $\rho\,(\cos\theta + j\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique du nombre z ; on la note encore $[\rho\,;\,\theta]$.

On détermine ρ et θ par les relations :

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2+b^2} \text{ et si } \rho \neq 0 : \cos\theta = \frac{a}{\rho}\ ;\ \sin\theta = \frac{b}{\rho}}$$

On peut utiliser, si $a \neq 0$ la relation $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

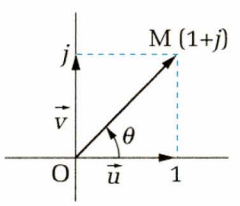
- Deux nombres complexes égaux ont la même image et réciproquement. On en déduit le résultat suivant : soit deux nombre z et z' non nuls tels que $z = [\rho\,;\,\theta]$ et $z' = [\rho'\,;\,\theta']$; $z = z'$ équivaut à $\rho = \rho'$ et $\theta = \theta' + k\,2\pi$; k entier relatif.

Applications directes

a. Forme trigonométrique de $z = 1 + j$

On a : OM $= \sqrt{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$

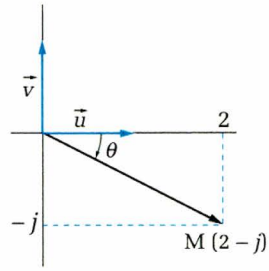
$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ou $z = \left[\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.



b. Module et argument de $z = 2 - j$

$\rho = |z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$; $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$.

L'équation $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ admet sur $[0 ; \pi]$ une solution unique α ; à la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 0{,}46$. Sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, l'équation $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ admet 2 solutions : α et $-\alpha$.
Puisque M est dans le 4e quadrant, Arg $z = -\alpha$ d'où Arg $z \approx -0{,}46$.



c. Forme algébrique de $z = \left[3, -\frac{2\pi}{3}\right]$

$z = 3\left[\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right]$ soit $z = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

$z = 3\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $z = -\frac{3}{2} - j\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

E$_7$ et E$_8$

5. Module et argument d'un produit

Considérons deux nombres complexes non nuls z et z'.
$z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$; $\rho > 0$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + j\sin\theta')$; $\rho' > 0$.
Déterminons la forme trigonométrique du produit $Z = z \times z'$.
$Z = \rho\rho'[(\cos\theta + j\sin\theta)(\cos\theta' + j\sin\theta')]$
$(\cos\theta + j\sin\theta)(\cos\theta' + j\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + j(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)$.
D'après les formules d'addition vues dans le tome 1, on a :
$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$
$\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta = \sin(\theta + \theta')$.
On obtient alors : $\boldsymbol{Z = \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + j\sin(\theta + \theta')]}$.
Cette écriture est de la forme
$Z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ avec $r = \rho\rho'$ $(r > 0)$ et $\varphi = \theta + \theta'$ à $k\,2\pi$ près.
C'est donc la forme trigonométrique de Z. On en déduit que Z a pour module $\rho\rho'$ et pour argument $\theta + \theta'$.

Faisons le point

Le produit de deux nombres complexes non nuls a pour module le produit de leurs modules et pour argument la somme de leurs arguments.

$$[\rho, \theta] \times [\rho', \theta'] = [\rho\rho', \theta + \theta'].$$

Résultat utile

Module et argument d'un quotient

Soit deux nombres complexes non nuls $z = [\rho, \theta]$ et $z' = [\rho', \theta']$ et le quotient $Z = \frac{z}{z'}$.

On a $Z \times z' = z$, d'où, si $Z = [r, \varphi]$: $[r, \varphi] \times [\rho', \theta'] = [\rho, \theta]$
donc, d'après le résultat précédent : $[r \times \rho', \varphi + \theta'] = [\rho, \theta]$.
On en déduit : $\rho = r \times \rho'$ et $\theta = \varphi + \theta'$ (à $k\,2\pi$ près),
c'est-à-dire : $r = \frac{\rho}{\rho'}$ et $\varphi = \theta - \theta'$ (à $k\,2\pi$ près).

Ainsi, $\frac{\rho}{\rho'}$ est le module de $\frac{z}{z'}$ et $\theta - \theta'$ est un argument de $\frac{z}{z'}$.

E$_9$

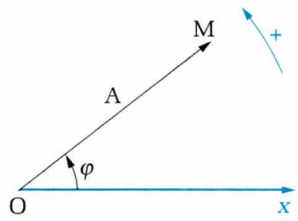
6. Application à l'électricité et à l'électronique

Nous donnons ici les règles utilisées en électricité. Elles permettront l'utilisation des nombres complexes dans la résolution de problèmes technologiques.

Représentation d'une grandeur sinusoïdale par un nombre complexe

On représente la fonction sinusoïdale
$f : t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ avec $A > 0$, soit :
– par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que OM = A et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi$;
– par le nombre complexe $z = [A ; \varphi]$ tel que :

$$|z| = A \quad \text{et} \quad \arg z = \varphi.$$

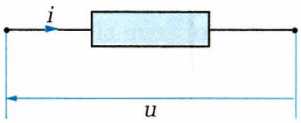


Dans la pratique des circuits électriques, si $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ ou si $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, on convient encore de représenter i ou u par le nombre $z = [I, \varphi]$ ou $z = [U ; \varphi]$; I et U valeurs efficaces.

Impédance complexe d'un dipôle

Soit un dipôle passif soumis à une tension sinusoïdale u de pulsation ω ; il est parcouru par un courant sinusoïdal i de même pulsation.
On note $\underline{U}$ le nombre complexe représentant u et $\underline{I}$ le nombre complexe représentant i, on appelle alors **impédance complexe** du dipôle le nombre complexe noté $\underline{Z}$ et défini par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$



Faisons le point

On retiendra les résultats suivants :
– pour un dipôle résistif de résistance R : $\underline{Z} = R$; $Z = [R ; 0]$;
– pour une bobine parfaite d'inductance L : $\underline{Z} = jL\omega$; $\underline{Z} = \left[L\omega ; \frac{\pi}{2}\right]$;
– pour un condensateur parfait de capacité C : $\underline{Z} = -j\frac{1}{C\omega}$; $\underline{Z} = \left[\frac{1}{C\omega}, -\frac{\pi}{2}\right]$;
– pour une association en série de dipôles d'impédances complexes $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, l'impédance complexe du circuit est $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$;
– pour une association en parallèle de dipôles d'impédances complexes $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, l'impédance complexe du circuit est donnée par :
$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$; le nombre $\frac{1}{\underline{Z}}$ est appelé **admittance complexe**.

E_{10} à E_{12}

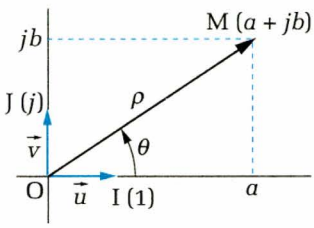
BILAN

1. Forme algébrique

Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = a + jb$ où a et b sont des réels et où j est un nombre complexe tel que $j^2 = 1$.
La **partie réelle** de z est a ; la **partie imaginaire** de z est b.
Le nombre $\overline{z} = a - jb$ est le **nombre conjugué** de z.

2. Représentation géométrique

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal positif $(O ; \vec{u}, \vec{v})$:
– le point M $(a ; b)$ est **l'image** du nombre $z = a + jb$;
– le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **l'image** du nombre $z = a + jb$;
– le nombre $z = a + jb$ est **l'affixe** du point M $(a ; b)$ ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



3. Module et argument. Forme trigonométrique

- Soit un nombre complexe $z = a + jb$ et M $(a ; b)$ son image ; on appelle :
– **module** de z la norme de $\overrightarrow{OM}$; on le note $|z|$ ou le plus souvent ρ ;
$\rho = |z| = \| \overrightarrow{OM} \|$;
– si $z \neq 0$, **argument** de z toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$; on le note arg z ou le plus souvent θ ; ainsi $\theta = \arg z = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
- La **forme trigonométrique** de z est $z = \rho(\cos\theta + j \sin\theta)$; on écrit $z = [\rho ; \theta]$.
En particulier : $j = \left[1 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a les relations :

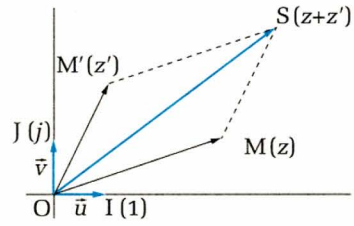
$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \ ; \ \cos\theta = \frac{a}{\rho} \ ; \ \sin\theta = \frac{b}{\rho} \ ; \ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

4. Somme et produit de deux nombres complexes

- Si $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$ alors :

$$z + z' = (a + a') + j(b + b')$$
$$zz' = aa' - bb' + j(ab' + ba')$$

Si z a pour image $\overrightarrow{OM}$ et si z' a pour image $\overrightarrow{OM'}$, alors $z + z'$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{OS}$ tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.



- **Module et argument d'un produit**
Si $z = [\rho ; \theta]$ et $z' = [\rho' ; \theta']$ alors $z \times z' = [\rho\rho' ; \theta + \theta']$.

5. Inverse. Quotient

Pour obtenir la forme algébrique de $\frac{1}{a + jb}$ ou de $\frac{a + jb}{a' + jb'}$ on multiplie les deux termes du quotient par le nombre conjugué du dénominateur.

POUR S'ENTRAÎNER

Calculs dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 1

On donne les nombres complexes z et z'.
Calculer $z + z'$; $z - 2z'$; zz'.

1. $z = 2 + 3j$; $z' = 4 - 5j$.

2. $z = 1 - j$; $z' = 3 - 7j$.

3. $z = 2(1 + j)$; $z' = -3(2 - j)$.

EXERCICE 2

Calculer les nombres complexes.
$(1 + j)(5 - j)(j - 2)$
$(2 + j)(j - 1)(1 - 2j)$.

EXERCICE 3

Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

$\frac{1}{2+j}$; $\frac{1}{4+3j}$; $\frac{3-5j}{1+2j}$; $\frac{-5+j}{j+4}$.

Représentation géométrique. Forme trigonométrique. Module et argument

EXERCICE 4

On considère le nombre $z = 2 + 3j$.
Représenter les nombres z ; $\overline{z}$; $-z$; $-\overline{z}$.

EXERCICE 5

Donner les affixes des points ou des vecteurs suivants :
A $(-1 ; 2)$; B $(3 ; -2)$; C $(1 ; 1)$
$\vec{V}_1(4 ; -3)$; $\vec{V}_2(2 ; 5)$; $\vec{V}_3(-1 ; -3)$.

EXERCICE 6

1. Représenter géométriquement les nombres complexes :
$z_1 = 4 + 2j$; $z_2 = 3 - 4j$.

2. Construire les images des nombres :
$z = z_1 + z_2$; $z' = z_1 - z_2$.

3. Soit le nombre complexe $z_3 = -1 - 3j$.
Construire l'image du nombre $z'' = z_1 + z_2 + z_3$.

EXERCICE 7

Calculer le module et l'argument principal des nombres suivants :
$1 - j\sqrt{3}$; $2 + 3j$.

EXERCICE 8

Pour chacun des nombres suivant, calculer le module et l'argument principal, puis donner la forme trigonométrique :

1. $3 + 4j$; $8 - 9j$.

2. $-1 - 3j$; $-2 + 4j$.

EXERCICE 9

1. Calculer le module et l'argument principal de $1 - j$ et de $1 + j$.

2. En déduire le module et l'argument principal des nombres :
$z = (1 - j)(1 + j)$ et $z' = \frac{1-j}{1+j}$.

3. Retrouver le résultat de la question précédente en mettant z et z' sous forme algébrique.

Applications à l'électricité et à l'électronique

Rappel : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

EXERCICE 10

Un dipôle soumis à une tension sinusoïdale u, telle que, en volts, $u(t) = 24\sqrt{2}\sin 100\pi t$ a une impédance complexe $\underline{Z} = \left[50, \frac{\pi}{6}\right]$.

1. Déterminer les nombres complexes $\underline{U}$ puis $\underline{I}$ qui représentent la tension et l'intensité i du courant qui parcourt le dipôle.

2. En déduire, l'expression $i(t)$ de l'intensité i, en ampères, du courant qui parcourt le dipôle.

EXERCICE 11

Trois dipôles d'impédances complexes $\underline{Z}_1 = 20 + 25j$, $\underline{Z}_2 = 100 - 75j$, $\underline{Z}_3 = 50 + 10j$ sont associés en série.

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle équivalent.

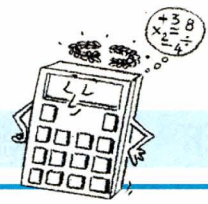
2. Calculer le module et un argument de $\underline{Z}$.

EXERCICE 12

Deux dipôles d'impédances complexes $\underline{Z}_1 = 10 + 20j$ et $\underline{Z}_2 = 20 - 10j$ sont associés en parallèle.

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle équivalent.

2. Calculer le module et un argument de $\underline{Z}$.



LE JOUR DU BAC

Énoncé

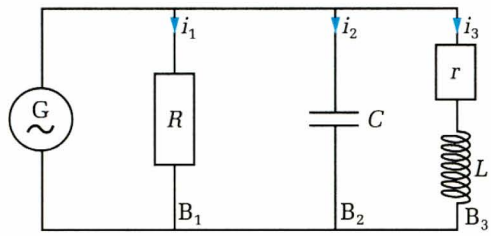
Le montage suivant est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale dont l'expression instantanée est, en volts, donnée, en fonction du temps t en secondes par $u(t) = 220\sqrt{2}\sin 314t$.

La branche B_1 comporte un résistor de résistance $R = 100\ \Omega$.

La branche B_2 comporte un condensateur parfait de capacité $C = 2 \cdot 10^{-5}$ F.

La branche B_3 est constituée de l'association en série d'un résistor de résistance $r = 20\ \Omega$ et d'une bobine parfaite d'inductance $L = 1$ H.

On note $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ les impédances complexes des branches B_1, B_2, B_3 et $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ les expressions complexes des intensités i_1, i_2, i_3.



Pour chaque branche :

1. Calculer l'impédance complexe.

2. Calculer l'expression complexe de l'intensité du courant traversant cette branche.

3. Déterminer l'expression de la valeur instantanée et la valeur efficace de cette intensité.

Commentaire

Pour la détermination de l'expression complexe de l'intensité (question 2.), on utilisera la relation $\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}$ avec $\underline{U} = 220$.

Pour la détermination de l'expression de la valeur instantanée de l'intensité i, il faut mettre l'expression complexe $\underline{I}$ sous la forme trigonométrique.

Si $\underline{I} = [I, \varphi]$ alors $i = I\sqrt{2}\sin(314t + \varphi)$; on pourra prolonger le problème posé par le travail suivant :

– déterminer l'intensité i du courant principal en remarquant que $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$;

– retrouver le résultat obtenu en utilisant l'impédance complexe du montage.

Solution

Branche B_1

1. On a $\underline{Z}_1 = R$ soit $\underline{Z}_1 = 100$.

2. $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ d'où $\underline{I}_1 = \dfrac{220}{100} = 2{,}2$.

3. La forme trigonométrique de $\underline{I}_1$ est : $[2{,}2\ ;\ 0]$ d'où : $i_1 = 2{,}2\sqrt{2}\sin 314t$.

Valeur efficace de i_1 : 2,2 A.

Branche B_2

1. $\underline{Z}_2 = \dfrac{-j}{C\omega}$; $\underline{Z}_2 = \dfrac{-j}{2 \cdot 10^{-5} \times 314}$; $\underline{Z}_2 = -\dfrac{10^5}{628}j$.

2. $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_2}$ d'où, puisque $-\dfrac{1}{j} = j$, $\underline{I}_2 = 220 \times 628 \times 10^{-5} j$; $\underline{I}_2 = 1{,}381\,6\,j$.

3. La forme trigonométrique de $\underline{I}_2$ est $\left[1{,}381\,6\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $i_2 = 1{,}381\,6\sqrt{2}\sin\left(314t + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

on sait que, pour tout réel x, $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$ donc $i_2 = 1{,}381\,6\sqrt{2}\cos(314t)$.

La valeur efficace de i_2 est 1,381 6 A.

Branche B_3

1. $\underline{Z}_3 = r + jL\omega$ soit $\underline{Z}_3 = 20 + 314\,j$.

2. $\underline{I}_3 = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_3}$ d'où $\underline{I}_3 = \dfrac{220}{20+314\,j}$, on obtient : $\underline{I}_3 = \dfrac{220\,(20-314\,j)}{(20+314\,j)(20-314\,j)}$

d'où $\underline{I}_3 = \dfrac{220}{20^2+314^2}\,(20-314\,j)$; $\underline{I}_3 = \dfrac{220}{98\,996}\,(20-314\,j)$; $\underline{I}_3 \approx 0{,}044\,4 - 0{,}6978\,j$;

3. Déterminons la forme trigonométrique de $\underline{I}_3$.
Au lieu d'utiliser la forme algébrique approchée de $\underline{I}_3$, utilisons le résultat donné paragraphe 5 concernant un quotient.

De $\underline{I}_3 = \dfrac{220}{20+314\,j}$, on déduit :

$|\underline{I}_3| = \dfrac{220}{\sqrt{20^2+314^2}}$ d'où $|\underline{I}_3| = \approx 0{,}6992$ et si l'on pose

$\varphi_3 = \arg \underline{I}_3$, $\varphi_3 = \arg(220) - \arg(20 + 314\,j) = -\arg(20 + 314\,j)$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $\arg(20 + 314\,j) \approx 1{,}0507$, d'où $\varphi_3 \approx -1{,}0507$.

On en déduit : $i_3 \approx 0{,}699\,2\,\sqrt{2}\,\sin(314\,t - 1{,}507)$.

Valeur efficace de i_3 : $I_3 \approx 0{,}699\,2$ A.

POUR APPROFONDIR

PROBLÈME 1

On considère les nombres $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,j$ et $z_2 = \left[2\sqrt{2}, \dfrac{-\pi}{4}\right]$.

1. Écrire z_1 sous forme trigonométrique et z_2 sous forme algébrique.

2. Calculer $\dfrac{z_1}{z_2}$.

PROBLÈME 2

Soit x un nombre réel ; mettre sous la forme algébrique les nombres complexes :

$z_1 = \dfrac{1}{x-j} + \dfrac{1}{1-xj}$ et $z_2 = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Pour quelles valeurs de x a-t-on $z_1 = z_2$?

PROBLÈME 3

Soit le nombre $z = \dfrac{1}{1+jm} - \dfrac{1}{2}$; m réel.

1. Calculer le module et un argument de z dans le cas où $m = 1$ puis dans le cas où $m = \sqrt{3}$.

2. Démontrer que, quel que soit le réel m, le module de z est indépendant de m.

PROBLÈME 4

BAC PRO

On considère les nombres complexes :
z_1 de module 3 et d'argument π ;
z_2 de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\dfrac{\pi}{4}$;
z_3 nombre conjugué de z_2.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal positif $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Écrire z_1, z_2, z_3 sous forme algébrique.

2. Placer les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectives -3, $1 + j$, $1 - j$;
Quelle est la nature du triangle $A_1\,A_2\,A_3$?

3. Soient B_2 et B_3 les symétriques de A_2 et A_3 par rapport à A_1.
On note z'_2 et z'_3 les affixes de B_2 et B_3.

a. Déterminer les formes algébriques de z'_2 et z'_3.
Calculer les modules de z'_2 et z'_3.

b. Calculer $\dfrac{OB_2}{OA_2}$.

PROBLÈME 5

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

x et y sont deux nombres réels non nuls.
On considère les nombres complexes suivants :
$z = 1 + j\,\frac{x}{y}$
$z' = 1 + 2\,j \cdot x - x^2$

1. a. Exprimer sous la forme algébrique le nombre complexe $Z = z \cdot z'$.
b. Écrire la relation liant x et y pour que ce nombre Z soit réel. Dans ces conditions, exprimer y en fonction de x.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{x^2-1}{2}$.
a). Tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ obtenu pour x appartenant à l'intervalle $[-5 ; +5]$
b. Quel est l'ensemble des points M de coordonnées x et y pour lesquels le nombre complexe zz' défini au **1. a.** est réel ?

Applications à l'électricité

PROBLÈME 6 BAC PRO

Trois intensités sinusoïdales i_1, i_2, i_3 de même fréquence sont représentées par les nombres complexes z_1, z_2, z_3 dont on donne les modules et les arguments :
z_1 : module 6, argument 0 ;
z_2 : module 8, argument $\frac{2\pi}{3}$;
z_3 : module 12, argument $\frac{4\pi}{3}$.

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Écrire z_1, z_2 et $z_1 + z_2$ sous la forme algébrique.

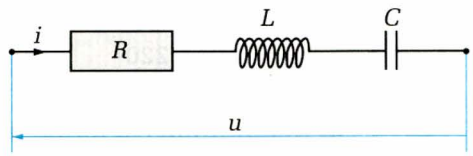
2. Représenter dans le plan rapporté un repère orthonormal positif $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm les images M_1, M_2, M_3 des nombres z_1, z_2, z_3.

3. a. Placer l'image S_1 de $z_1 + z_2$.
b. Construire l'image S de la somme $z = z_1 + z_2 + z_3$.

4. Déterminer graphiquement le module et un argument de z.

PROBLÈME 7 BAC PRO

Le circuit modélisé ci-dessous est soumis à la tension sinusoïdale u telle que, en volts, $u(t) = 24\sqrt{2}\sin(314\,t)$.

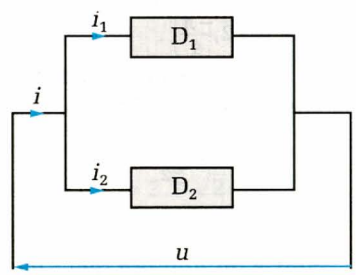


$R = 25\ \Omega$; $L = 0{,}7$ H ; $C = 8 \cdot 10^{-6}$ F.

1. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit.
2. Déterminer le module de $\underline{Z}$; en déduire la valeur efficace de l'intensité.
3. Calculer la détermination principale de l'argument de $\underline{Z}$ (valeur arrondie au millième). En déduire l'expression $i(t)$ de l'intensité du courant.
4. Si on représente la tension u et l'intensité i par les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{I}$, que représente la détermination principale de arg $\underline{Z}$ calculée précédemment ?
5. Si l'on prend pour origine des phases, la phase du courant, quelles sont alors les expressions $i(t)$ et $u(t)$ de l'intensité et du courant ?

PROBLÈME 8 BAC PRO

On considère le montage suivant, où les dipôles D_1 et D_2 sont soumis à une même tension sinusoïdale u.



On a : $I_1 = 6$ A et $(\vec{U}, \vec{I_1}) = \frac{\pi}{3}$
$I_2 = 10$ A et $(\vec{U}, \vec{I_2}) = -\frac{\pi}{6}$.

1. Donner la forme algébrique des nombres complexes $\underline{I_1}$, et $\underline{I_2}$ qui représentent i_1 et i_2.

2. Le courant somme i est représenté par $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$; calculer le module et un argument de $\underline{I}$. En déduire les caractéristiques du courant i (valeur efficace et phase).

PROBLÈME 8 — BAC PRO

On monte en série, un résistor A de résistance $R = 25\ \Omega$ et une bobine B de résistance R_1 et d'inductance L.

La tension u_1 aux bornes du résistor est, en volts, donnée en fonction du temps t, en secondes par :

$$u_1(t) = 50\sqrt{2}\ \sin(100\pi t).$$

La tension u_2 aux bornes de la bobine est, en volts, donnée par :

$$u_2(t) = 30\sqrt{2}\ \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Déterminer l'expression instantanée $i(t)$ de l'intensité i, en ampères, qui parcourt le résistor.

2. En utilisant le résultat précédent, calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ de la bobine. En déduire la résistance R, en ohms, et l'inductance L, en henrys de la bobine.

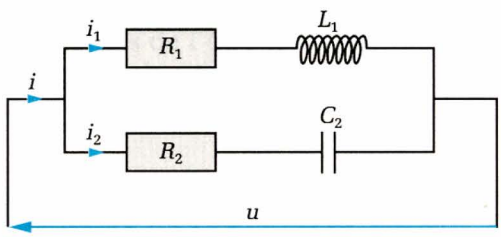
PROBLÈME 10 — BAC PRO

Le circuit suivant est soumis à une tension sinusoïdale dont la valeur instantanée est :

$u = 24\sqrt{2}\ \sin(\omega t)$.

$R_1 = 3\ \text{k}\Omega$; $R_2 = 2\ \text{k}\Omega$; $L_1\omega = 4{,}5\ \text{k}\Omega$;

$\frac{1}{C_2\omega} = 5{,}5\ \text{k}\Omega$.



1. Calculer les valeurs efficaces des intensités i_1 et i_2.

2. Calculer l'impédance complexe du circuit. En déduire l'expression complexe $\underline{I}$ de l'intensité i.

3. Déterminer l'expression de la valeur instantanée de i.

PROBLÈME 11 — BAC PRO

On considère la fonction de transfert T telle que :

$$T(x) = 1 + 2\,mjx - x^2$$

où j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

m est un nombre réel donné strictement positif, x est un nombre réel strictement positif qui représente le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ de deux pulsations.

Les deux parties du problème peuvent être traitées indépendamment.

1re partie :

1. On suppose que $m = 2$; dans ces conditions

$T(x) = 1 + 4\,jx - x^2$ ①

On se propose de vérifier que $T(x)$ peut s'écrire sous le forme :

$T(x) = (1 + jax)(1 + jbx)$ ②

où a et b sont deux réels non nuls à déterminer.

a. En développant le produit $(1 + jax)(1 + jbx)$ et en identifiant le résultat obtenu avec l'expression ① de $T(x)$, montrer que les nombre a et b sont les solutions du système (S) d'inconnues a et b :

$$\text{(S)}\ \begin{cases} a+b=4 \\ ab=1 \end{cases}$$

b. Montrer que les nombres a et b sont alors solutions du système (S') :

$$\text{(S')}\ \begin{cases} a^2-4a+1=0 \\ b=\frac{1}{a} \end{cases}$$

c. Résoudre l'équation d'inconnue réelle X : $X^2 - 4X + 1 = 0$.

d. En supposant que l'on a : $0 < a < 1 < b$, donner, en utilisant les résultats précédents, les valeurs exactes de a et b.

Vérifier qu'avec ces valeurs $T(x)$ s'écrit sous la forme ②.

2. On suppose maintenant que $m = 1$.

Vérifier que, dans ce cas, il existe un réel c tel que $T(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$T(x) = (1 + jcx)^2.$$

Déterminer le nombre c.

2e partie :

On suppose dans cette partie que $m = 0{,}5$ et on se propose d'étudier le module du nombre complexe $T(x)$.

1. Vérifier que le module $T(x)$ est alors donné par :

$$|T(x)| = \sqrt{1-x^2+x^4}$$

2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2+x^4}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm.

Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier qu'elle peut s'exprimer par :

$$f'(x) = \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2+x^4}}$$

On utilisera les résultats suivants :

si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$; si $g(x) = x^4$ alors $g'(x) = 4x^3$.

3. Déterminer les nombres réels de l'intervalle [0 ; 2] pour lesquels on a $f'(x) = 0$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4. Étudier sur l'intervalle [0 ; 2] le signe de $2x^2 - 1$. En déduire le signe de $f'(x)$. Donner le tableau de variation de la fonction f.

5. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	0,5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1,5	2
$f(x)$						

On donnera des valeurs arrondies au centième.

6. En utilisant les résultats précédents, tracer la courbe $\mathscr{C}$.

4

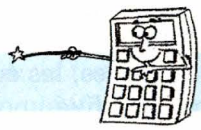
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectifs

▶ **Savoir résoudre une équation différentielle du 1er ordre du type $y' - ay = 0$ où a est un nombre réel fixé et savoir déterminer une solution de cette équation satisfaisant à une condition initiale donnée.**

▶ **Savoir résoudre une équation différentielle du 2e ordre du type $y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont des nombres réels fixés et savoir déterminer une solution de cette équation satisfaisant à des conditions initiales données.**

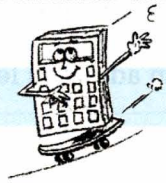
Posons le problème



▶ Dans une première partie, le chapitre dégage la notion d'équation différentielle du 1er ordre du type $y' - ay = 0$ et le vocabulaire utilisé. Il donne les méthodes de recherche de la solution générale et d'une solution particulière.

▶ La seconde partie (réservée aux élèves des sections des Baccalauréats Professionnels des métiers de l'électricité) donne les règles permettant de résoudre une équation différentielle du 2e ordre du type $y'' + ay' + by = 0$ et aborde des exemples de recherche d'une solution satisfaisant à des conditions initiales données.

Activités et résultats



1. Équations différentielles du premier ordre

a. Équation $y' - y = 0$

Sachant que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, compléter les tableaux suivants en déterminant les fonctions dérivées des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$ données dans les premières colonnes.

f	f'
$\exp : x \mapsto e^x$	$\exp' : x \mapsto e^x$
$u : x \mapsto 2\,e^x$	$u' : x \mapsto$
$v : x \mapsto e^{-x}$	$v' : x \mapsto -e^{-x}$
$w : x \mapsto -3\,e^{-2x}$	$w' : x \mapsto$
$\sin : x \mapsto \sin x$	$\sin' : x \mapsto$
$\cos : x \mapsto \cos x$	$\cos' : x \mapsto -\sin x$

f	f'
$p_1 : x \mapsto x$	$p_1' : x \mapsto 1$
$p_2 : x \mapsto x^2$	$p_2' : x \mapsto 2x$
$p_3 : x \mapsto x^3$	$p_3' : x \mapsto$
$p_0 : x \mapsto 1$	$p_0' : x \mapsto$
$o : x \mapsto 0$	$o' : x \mapsto 0$
$t : x \mapsto 2\,e^{3x}$	$t' : x \mapsto$

On constate, que trois des fonctions qui figurent dans les tableaux sont égales à leur fonction dérivée : les fonctions exp, u et o.
Ces trois fonctions satisfont donc la relation $y' = y$ où y désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée. La relation $y' = y$ s'écrit encore $y' - y = 0$.

- **Définition. Vocabulaire**
Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est dérivable et qui satisfait à la relation $y' - y = 0$ est dite **solution** de l'équation $y' - y = 0$. Dans cette équation l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ notée y et y' sa fonction dérivée.
L'équation $y' - y = 0$ faisant intervenir y' est appelée **équation différentielle du 1er ordre**.
- **Résolution de l'équation $y' - y = 0$**
Résoudre l'équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions. Nous vérifions que, si k est un nombre réel, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^x$ est égale à sa fonction dérivée.
Donc, toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^x$, k réel quelconque sont solutions de l'équation $y' - y = 0$. On admettra que ce sont les seules solutions.

b. Équation $y' - ay = 0$, a nombre réel fixé
La lecture du tableau précédent permet d'affirmer que :
– la fonction $x \mapsto -3\,e^{-2x}$ est solution de l'équation $y' = -2y$ ou $y' + 2y = 0$;
– la fonction $x \mapsto 2\,e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$ ou $y' - 3y = 0$;
– la fonction $x \mapsto x^2$ est solution de l'équation $(y')^2 = 4y$.
Parmi ces équations différentielles, les équations $y' + 2y = 0$ et $y' - 3y = 0$ sont de la forme $y' - ay = 0$ où a est un réel fixé.
Étudions l'équation $y' - 3y = 0$.
Soit k un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^{3x}$.
Pour tout x réel, on a $f'(x) = 3k\,e^{3x}$, c'est-à-dire $f'(x) = 3f(x)$ donc, la fonction f est une solution de l'équation $y' - 3y = 0$.
Toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^{3x}$, k réel quelconque, sont des solutions de l'équation $y' - 3y = 0$. On admettra que ce sont les seules.
Si l'on donne à k une valeur numérique particulière, la fonction obtenue est appelée **solution particulière** de l'équation. Par exemple, la fonction $x \mapsto 2\,e^{3x}$ est une solution particulière de l'équation $y' - 3y = 0$.
Plus généralement, on admettra les résultats suivants.

Faisons le point

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$, où a est un nombre réel fixé, sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$ où k est un réel quelconque.
L'ensemble des fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$ est appelé **solution générale** de l'équation $y' - ay = 0$.
- La fonction obtenue pour une valeur particulière de k s'appelle **solution particulière** de l'équation différentielle.
- Il existe **une et une seule solution** f de l'équation $y' - ay = 0$ qui prend la valeur y_0 en x_0. On dit que f satisfait à **la condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Applications directes

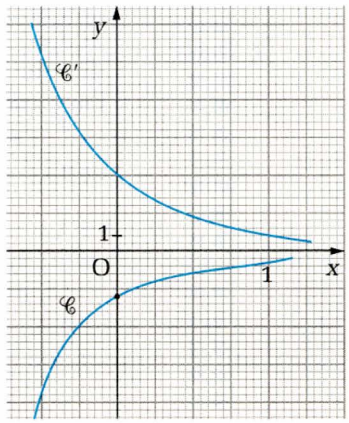
Soit l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
a. Résoudre l'équation.
b. Déterminer la solution particulière g telle que $g(0) = -3$.

Résolution

a. $y' + 2y = 0$ est de la forme $y' - ay = 0$ avec $a = -2$
donc les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^{-2x}$; k réel quelconque.

b. La solution particulière g satisfait les deux conditions :
- Il existe un réel k tel que, pour tout x réel, $g(x) = k\,e^{-2x}$
- $g(0) = -3$

La figure suivante donne, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction g et l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}'$ d'une solution particulière obtenue pour $k > 0$ (ici $k = 5$).



Remarques

1. Si $a = 0$, $y' - ay = 0$ s'écrit $y' = 0$.
Résoudre cette équation c'est déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont la fonction dérivée est nulle pour tout x réel ; ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k$, k réel quelconque (fonctions constantes).
On retrouve ces fonctions dans l'expression $x \mapsto k\,e^{0x}$.

2. Une équation différentielle peut être écrite en utilisant la notation différentielle de la fonction dérivée. Par exemple, $y' + y = 0$ peut s'écrire, si x désigne la variable $\frac{dy}{dx} + y = 0$ ou, si t désigne la variable, $\frac{dy}{dt} + y = 0$.

E_1 à E_{10}

2. Équations différentielles du second ordre

Ce paragraphe ne s'adresse qu'aux élèves des sections des Baccalauréats Professionnels des métiers de l'électricité.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin x$.
Pour tout x réel, on a $f'(x) = \cos x$. La fonction f', fonction dérivée de f, est elle même dérivable, sa dérivée est appelée fonction **dérivée seconde** de la fonction f, on la note f''.
Ainsi, pour tout x réel, si $f(x) = \sin x$, alors $f'(x) = \cos x$ et $f''(x) = -\sin x$.
La fonction sinus vérifie donc la relation $f'' = -f$ que l'on pourra écrire $y'' = -y$ ou $y'' + y = 0$.
Une telle relation où intervient y'' est appelée équation différentielle du second ordre.
On généralise le vocabulaire utilisé pour les équations du premier ordre ; par exemple on dit que la fonction sinus est une solution particulière de l'équation $y'' + y = 0$.
Pour résoudre une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = 0$, a et b réels fixés, on utilisera les résultats suivants.

Faisons le point

Les fonctions solutions sont déterminées par la résolution de l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$, appelée *équation caractéristique*. Le discriminant Δ de cette équation est égal à $a^2 - 4b$. On remarque que a et b étant des nombres réels, Δ est aussi un nombre réel.

Cas général

Solutions de l'équation $r^2 + ar + b = 0$	*Fonctions solutions de l'équation* $y'' + ay' + by = 0$
Si $\Delta > 0$ alors l'équation a 2 solutions réelles distinctes : r_1 et r_2	Toutes les fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}$ A et B constantes réelles quelconques.
Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solutions réelles On pose $\alpha = \frac{-a}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$	Toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$ A et B constantes réelles quelconques *Remarque* L'expression $e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$ peut aussi s'écrire sous l'une des formes suivantes : • $K\,e^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)$ • $K'\,e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi')$ K, K' constantes réelles positives quelconques et φ, φ' constantes réelles quelconques.
Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution unique r_0 (solution double).	Toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto (Ax + B)\,e^{r_0 x}$ A et B constantes réelles quelconques.

Cas particulier important : $a = 0$ et $b = \omega^2$ (ω réel non nul fixé)
L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet comme seules solutions, toutes les fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ où A et B sont deux constantes réelles quelconques.

Remarque
L'expression $A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ peut aussi s'écrire sous l'une des formes suivantes :

- $K \sin(\omega x + \varphi)$
- $K' \cos(\omega x + \varphi')$

où K et K' sont des constantes réelles positives ou nulles et φ, φ' des constantes réelles.

Propriété
Pour chacune des équations du second ordre considérées ci-dessus, il existe **une et une seule solution f** qui satisfait les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$.

Applications directes

1. a. *Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$.*

b. *Donner la solution f de cette équation qui satisfait les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ (on rappelle que la fonction dérivée de $x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto 2\cos(2x)$ et que la fonction dérivée de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto -2\sin(2x)$.)*

Résolution

a. L'équation différentielle donnée est une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$.
Les solutions de cette équation sont donc toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto A \cos(2x) + B \sin(2x)$ où A et B sont des constantes réelles.

b. La solution particulière f satisfait les trois conditions :
• il existe deux nombres réels A et B tels que pour tout x réel, $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$;
• $f(0) = 1$;
• $f'(0) = 1$.
Calculons A et B.
$f(0) = A$ donc $A = 1$
$f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$ d'où $f'(0) = 2B$ et donc $B = 1/2$.
La fonction f est telle que pour tout x réel, $f(x) = \cos(2x) + 0{,}5\sin(2x)$.

2. a. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 4y' + 4y = 0$.*
b. *Donner la solution g de cette équation telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.*

Résolution
a. L'équation caractéristique de cette équation est : $r^2 - 4r + 4 = 0$.
Le discriminant Δ de cette équation est nul. Cette équation possède donc une solution double ; cette solution double est le nombre 2.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (Ax + B)\,e^{2x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.
b. La solution particulière g satisfait les trois conditions :
• il existe deux nombres réels A et B tels que pour tout x réel $g(x) = (Ax + B)\,e^{2x}$;
• $g(0) = 1$;
• $g'(0) = 0$.
Calculons A et B.
$g(0) = B$ donc $B = 1$ et $g(x) = (Ax + 1)\,e^{2x}$
$g'(x) = A\,e^{2x} + 2(Ax + 1)\,e^{2x}$
$g'(0) = A + 2$ donc $A = -2$.
La fonction g est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (-2x + 1)\cdot e^{2x}$.

3. a. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 0$.*
b. *Déterminer la solution particulière g telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.*

Résolution
a. L'équation caractéristique de cette équation est : $r^2 - 1 = 0$. Cette équation a deux solutions réelles distinctes : -1 et 1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{x}$ où A et B sont des constantes réelles quelconques.
b. La solution particulière g satisfait les trois conditions :
• il existe deux réels A et B tels que, pour tout x réel, $g(x) = Ae^{-x} + Be^{x}$
• $g(0) = 0$
• $g'(0) = 1$
Calculons A et B : $g(0) = A + B$ donc $A + B = 0$
$g'(x) = -Ae^{-x} + Be^{x}$; $g'(0) = -A + B$ donc $-A + B = 1$
d'où le système $\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B = 1 \end{cases}$
• On obtient $A = -\frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$; la fonction g est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$.

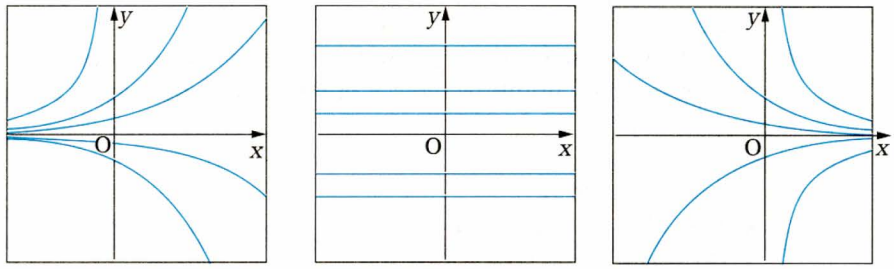
E_{11} à E_{14}

BILAN

1. Équation $y' - ay = 0$ (a nombre réel fixé)

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ (a nombre réel fixé) sont les fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, par $x \mapsto k\,e^{ax}$ où k est une constante réelle quelconque (positive, négative ou nulle).
- L'ensemble des fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$ est appelé **solution générale** de l'équation différentielle $y' - ay = 0$. Si on donne à k une valeur numérique particulière, la fonction obtenue s'appelle **solution particulière** de l'équation.
- Il existe **une et une seule solution** f de l'équation $y' - ay = 0$ qui prend la valeur y_0 en x_0. On dit que f satisfait à la **condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Représentation de quelques solutions

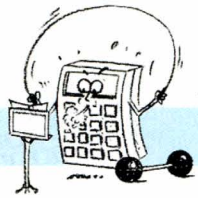


$a > 0$ | $a = 0$ | $a < 0$

2. Équation $y'' + ay' + by = 0$ (a et b réels fixés)

On considère l'équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$.

Solutions de $r^2 + ar + b = 0$	Fonctions solutions de $y'' + ay' + by = 0$
• 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2	Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}$
• une solution double $r_0 = -\frac{a}{2}$	Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (A\,x + B)\,e^{r_0 x}$
• pas de solutions réelles	Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto A\,e^{\alpha x}\left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)\right)$ avec $\alpha = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$ A et B sont deux constantes réelles quelconques



POUR S'ENTRAÎNER

Équations du premier ordre

EXERCICE 1

Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = 0$. Donner la solution f de cette équation qui satisfait à la condition $f(0) = 2$.

EXERCICE 2

Donner la solution générale de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Quelle est la solution u de cette équation qui satisfait à la condition $f(-1) = 1$?

EXERCICE 3

Résoudre l'équation différentielle $y' + 5y = 0$. Donner la solution f dont la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère passe par le point de coordonnées $(0 ; 4)$.

EXERCICE 4

Donner la solution générale de l'équation différentielle $2y' = -y$.

EXERCICE 5

Exprimer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie les deux conditions : pour tout x réel, $f'(x) = -3f(x)$ et $f(0) = -4$.

EXERCICE 6

Résoudre l'équation différentielle $\frac{1}{3}y' + y = 0$.

EXERCICE 7

Résoudre les équations différentielles suivantes et donner pour chacune d'entre elles la solution qui prend la valeur 1 en 0.

1. $y' + 5y = 0$; $y' + \frac{y}{3} = 0$; $y' - \frac{y}{4} = 0$.

2. $2y' + 3y = 0$; $-2y' + 5y = 0$; $3y' - y = 0$; $2y + 7y' = 0$

3. $y' = -5y$; $2y' = 3y$; $-y' = \frac{y}{2}$; $y = 9y'$.

EXERCICE 8

Montrer que les fonctions $w : x \mapsto -x - 2$ et $t : x \mapsto 2e^x - x - 2$ définies sur $\mathbb{R}$ sont deux solutions particulières de l'équation différentielle $y' - y = x + 1$ où y représente une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

EXERCICE 9

On considère l'équation différentielle (E) $y' - y = x + 1$ où y représente une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.
Sachant que la solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de l'équation (E) et de la solution générale de l'équation $y' - y = 0$, déterminer toutes les fonctions solutions de (E).
On utilisera le résultat obtenu à l'exercice 8.

EXERCICE 10

1. Résoudre l'équation différentielle $4y' + 5y = 0$.
2. Donner la solution particulière u de cette équation dont la dérivée vaut -5 en 0, c'est-à-dire telle que $u'(-5) = 0$.

Équations du second ordre

EXERCICE 11

Résoudre l'équation différentielle $x' + 7x = 0$ où x désigne une fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$ et x' sa fonction dérivée.

EXERCICE 12

C et R étant des réels fixés, résoudre l'équation différentielle $\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0$ où q désigne une fonction de la variable t définie sur $\mathbb{R}$ et $\frac{dq}{dt}$ sa fonction dérivée.

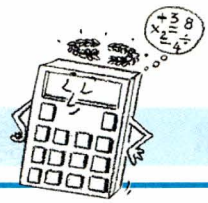
EXERCICE 13

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 0$.
2. Donner la solution u de cette équation qui satisfait aux conditions initiales $u(0) = 5$ et $u'(0) = 2$.

EXERCICE 14

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 0$.

2. Donner la solution h de cette équation qui satisfait aux conditions initiales $h(0) = 1$ et $h'(0) = 1$.



LE JOUR DU BAC

Énoncé

1. Résoudre l'équation différentielle E_1 : $y' + y = 0$.

2. On considère l'équation différentielle E_2 : $y' + y = 1$.
Vérifier que la fonction constante u telle que, pour tout x réel, $u(x) = 1$ est solution de cette équation.

3. Déterminer la solution générale de l'équation E_2 sachant qu'elle est la somme de la solution générale de l'équation E_1 et d'une solution particulière de l'équation E_2.

4. Le signal de sortie d'un organe de régulation est modélisé par la fonction S de la variable t où t représente le temps.
Déterminer la fonction S sachant que $S' + S = 1$ et que la fonction S prend la valeur 0 pour $t = 0$.

Commentaire

Le résultat de la question 1. est utile pour les questions 3. et 4. Pour éviter toute erreur, on vérifiera, par dérivation de la solution obtenue puis report dans l'équation E_1, que le résultat donné est correct.
Dans les trois premières questions, la variable est désignée par x. On sait que l'on peut utiliser, si ce n'est imposé, toute autre lettre de son choix. Pour l'application technologique de la question 4., il suffira de remplacer x par t.
L'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la modélisation du signal est valable n'est pas indiqué ; les résultats obtenus précédemment sont valables sur $\mathbb{R}$, donc a fortiori, sur cet intervalle.

Solution

1. L'équation est du type $y' - ay = 0$ avec $a = -1$.
En utilisant le formulaire, on obtient ses solutions ; ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^{-x}$ où k est une constante arbitraire réelle.

2. La fonction dérivée de la fonction u est la fonction u' définie sur $\mathbb{R}$ telle que $u'(x) = 0$.
On vérifie, que, pour tout x réel : $u'(x) + u(x) = 1$.
La fonction u est donc solution de E_2.

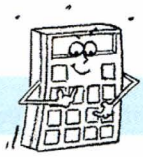
3. D'après la règle donnée, la solution générale g de E_2 est telle que, pour tout x réel :
$g(x) = k\,e^{-x} + 1$; k constante réelle quelconque.

4. Pour tout t de l'intervalle de validité de la modélisation, $S(t) = k\,e^{-t} + 1$; k constante réelle.
La condition $S(0) = 0$ permet de déterminer k.

$$S(0) = k\,e^{0} + 1 \qquad \text{soit} \qquad S(0) = k + 1.$$

De $S(0) = 0$, on déduit : $k + 1 = 0$
d'où : $k = -1$.
Pour tout t de l'intervalle de validité : $S(t) = -e^{-t} + 1$.

POUR APPROFONDIR



Indication

Pour la résolution de certains problèmes, on utilisera les résultats suivants que l'on admettra.
Soit les équations différentielles :

- $y' - ay = 0$ (E_1) ; $y' - ay = f(x)$ (E)
- $y'' + ay' + by = 0$ (E_1) ; $y'' + ay' + by = f(x)$ (E)

Dans les deux cas, la solution générale de l'équation (E) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation (E_1) une solution particulière de l'équation (E).

Équations du premier ordre

PROBLÈME 1

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par $x \mapsto e^{-3x}$.
a. Déterminer la fonction dérivée de g.
b. Dresser le tableau de variation de g.
c. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donner l'allure de la courbe représentative de g.

2. On considère l'équation différentielle (E) $y' + 3y = 0$.
a. Résoudre l'équation différentielle (E).
b. Déterminer la solution particulière s de cette équation qui prend la valeur 5 en 0.
c. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donner l'allure de la courbe représentative de s considérée sur l'intervalle $[-1 ; 1]$. Indiquer le procédé qui permet de passer de la courbe représentative de g à celle de s (ces deux courbes sont considérées sur l'intervalle $[-1 ; 1]$).

3. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, à partir de l'allure de la courbe représentative de g, donner l'allure de la courbe représentative de la solution u, considérée sur l'intervalle $[-1 ; 1]$, de l'équation (E) telle que $u(0) = -2$.

PROBLÈME 2 ✔

Soit l'équation différentielle (E) $y' + y = \sin x$ où y représente une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ et y' sa dérivée.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ soit solution de l'équation (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. Donner la solution générale de l'équation (E).

4. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

PROBLÈME 3 ●● ✔

Un condensateur de capacité C se charge à travers un élément résistif de résistance R sous l'action d'une source de tension de force électromotrice continue E.
L'équation différentielle correspondante s'écrit :

(1) $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}$ où q est la charge du condensateur à l'instant t.

1. Montrer que la fonction constante q_1 telle que $q_1 = CE$ est une solution particulière de l'équation (1).

2. Résoudre l'équation différentielle

$q' + \frac{1}{RC} q = 0$.

3. En utilisant l'indication donnée en haut de page, déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1). Déterminer la solution particulière de l'équation (1) telle que $q(0) = 0$.

PROBLÈME 4 BAC PRO ✔

Pour suivre l'évolution d'une réaction chimique on note $[A]_t$ la concentration (en mole par litre) d'un réactif A à l'instant t (exprimé en seconde).
On note $[A]_0$ la concentration initiale (à l'instant $t = 0$) du réactif A.

La vitesse de réaction est $v = -\frac{d[A]_t}{dt}$; on suppose que la réaction est telle que :

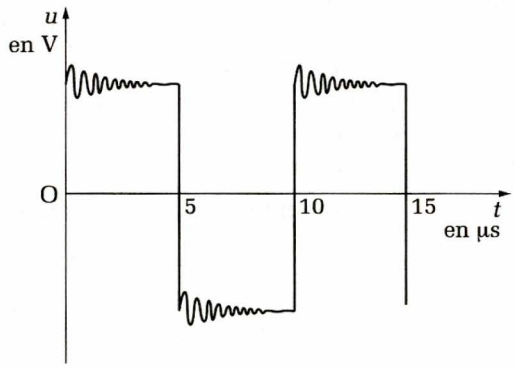
$-\frac{d[A]_t}{dt} = k\,[A]_t$ (k constante strictement positive donnée appelée constante de vitesse) et que $[A]_0 = 0{,}1$ mole par litre.

1. Résoudre l'équation différentielle :
$y' + ky = 0$ où k désigne un réel strictement positif donné.
2. Déterminer l'expression en fonction de $[A]_0$, de k et de t de la concentration $[A]_t$ en réactif A à l'instant t.
3. On a noté au bout de 500 secondes une concentration en réactif A égale à 0,09 mole par litre ; déterminer la valeur arrondie à 10^{-5} de k.
4. Déterminer l'instant t à partir duquel la concentration en réactif A est inférieure à 0,05 mole par litre.

Équations du second ordre

PROBLÈME 5 BAC PRO

Lors des essais du BUS NUMERIS de la salle de commande de la centrale de production nucléaire de CRUAS, des oscillations conformes à la représentation ci-dessous ont été relevées :



La durée d'un état binaire, soit $T/2$, sera considérée comme égale à 5 µs (ceci pour simplifier les calculs).
On étudiera cette oscillation autour d'une valeur moyenne dans l'intervalle $[0 ; T/2]$.
Au niveau du point de mesure, le circuit se comporte comme un circuit RLC ; on peut définir les oscillations du signal comme une variation de la charge q à l'intérieur du circuit en fonction du temps au moyen de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2 \cdot 10^6 \frac{dq}{dt} + 159 \cdot 10^{12}\, q = 0.$$

1. L'équation différentielle ci-dessus admet pour équation caractéristique :

$$r^2 + 2 \cdot 10^6\, r + 159 \cdot 10^{12} = 0.$$

Montrer que cette équation n'admet pas de solutions réelles.

2. Résoudre l'équation différentielle :
$y'' + 2 \cdot 10^6\, y' + 159 \cdot 10^{12}\, y = 0$
où y est une fonction deux fois dérivable de la variable réelle t.

3. Déterminer la solution particulière q de cette équation vérifiant les conditions :
$q(0) = 0$ et $q(0{,}125 \cdot 10^{-6}) = 0{,}441$

(On rappelle que $\frac{dq}{dt}$ est la notation différentielle de q' fonction dérivée première de q et que $\frac{d^2q}{dt^2}$ est la notation différentielle de q'' fonction dérivée seconde de q.)

PROBLÈME 6 BAC PRO ✔

On considère un circuit électrique comportant en série un générateur de courant continu de force électromotrice E (en volt), une bobine de résistance R (en ohm) et d'inductance L (en Henry) et un condensateur de capacité C (en Farad).

On appelle :
• q la fonction qui à tout instant t (en seconde) fait correspondre la charge $q(t)$ (en coulomb) du condensateur.
• i la fonction qui, à tout instant t fait correspondre l'intensité $i(t)$ (en ampère) du courant dans le circuit.
On démontre que q est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$Ly'' + Ry' + \frac{y}{C} = E$$

et que i est la fonction dérivée de q.

1. On prend : $L = 0{,}05$ H ; $R = 20\ \Omega$; $C = 10^{-4}$ F et $E = 100$ V.
Montrer que l'on obtient alors l'équation suivante :
(1) $y'' + 400\, y' + 200\,000\, y = 2\,000$.

2. a. Déterminer la solution générale de l'équation :
(2) $y'' + 400\, y' + 200\,000\, y = 0$.
b. Déterminer une solution particulière de l'équation (1) qui soit une fonction constante.
c. En déduire, en utilisant le résultat donné en haut de page précédente, la solution générale de l'équation (1).

3. Sachant que à l'instant $t = 0$, on a $q(t) = 0$ et $i(t) = 0$, déterminer les fonctions q et i.

5

SIGNAUX PÉRIODIQUES

Objectifs

▶ **Pour un signal sinusoïdal donné sous la forme $t \mapsto k \sin(\omega t + \varphi)$ ou $t \mapsto k \cos(\omega t + \varphi)$:**
– savoir déterminer par le calcul ou à partir de sa courbe représentative son amplitude, sa pulsation, sa fréquence, sa période fondamentale, sa phase à l'origine et établir son tableau de variation ;
– savoir construire sa courbe représentative, donner sa valeur et son énergie moyennes ainsi que sa valeur efficace.

▶ **Pour un signal périodique connu sur un intervalle ayant pour longueur une période :**
– savoir construire sa courbe représentative et dans des cas simples, exprimer « algébriquement » ce signal à partir de ce tracé ;
– savoir exprimer et éventuellement calculer dans des cas simples, sa valeur et son énergie moyennes ainsi que sa valeur efficace.

Pour prendre un bon départ

Rappelons les résultats essentiels relatifs à la fonction **sinus**.

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$
Quelques valeurs prises sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les valeurs prises sont comprises entre -1 *et* 1
Pour tout t réel, $\quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$.

La fonction sinus est une fonction périodique de période 2π
Pour tout t réel : $\quad \sin(t + 2\pi) = \sin t$.
On a aussi :
$\sin(t + 4\pi) = \sin t$, $\sin(t + 6\pi) = \sin t$, $\sin(t - 4\pi) = \sin t$, $\sin(t - 6\pi) = \sin t$.
Tout nombre T de la forme $k\,2\pi$ où k désigne un entier relatif est tel que :
pour tout t réel, $\quad \sin(t + T) = \sin t$.
Seuls les nombres de la forme $k\,2\pi$ possèdent cette propriété. On dit que l'ensemble des nombres $k\,2\pi$ est l'ensemble des périodes de la fonction sinus.

Le nombre 2π est la plus petite période strictement positive ; on l'appellera **période fondamentale**. On dit aussi communément que 2π est la période de la fonction sinus.

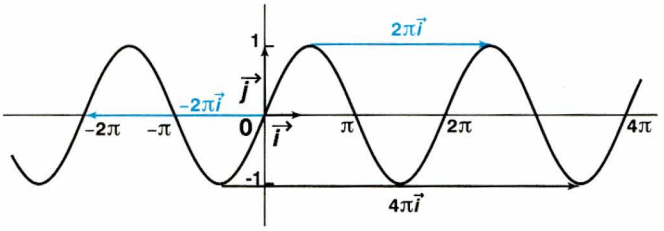
La fonction sinus est une fonction impaire
Pour tout réel t, $\sin(-t) = -\sin t$.

Tableau de variation sur $[0 ; \pi]$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin t$	0	1	0

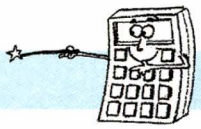
Courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

La courbe obtenue est une **sinusoïde** ; elle est invariante par toute translation de vecteur $k\,2\pi\,\vec{i}$ où k est un entier positif, négatif ou nul et est symétrique par rapport à O.



Dérivée
La fonction sinus est dérivable et pour tout t réel :
si $f(t) = \sin t$ alors $f'(t) = \cos t$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \sin(at + b)$ est dérivable et sa fonction dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto a\cos(at + b)$; a et b réels donnés.

Posons le problème



Dans la première partie, nous étudierons tout d'abord des signaux sinusoïdaux du type $t \mapsto a\sin(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$; $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ (vocabulaire usuel, variation, sinusoïde représentative, valeur moyenne et énergie moyenne sur une période, valeur efficace), nous considèrerons ensuite des signaux sinusoïdaux donnés par $t \mapsto k\sin(\alpha t + \beta)$ ou $t \mapsto k\cos(\alpha t + \beta)$, k, α et β réels quelconques.
Dans la seconde partie, nous apprendrons à construire d'autres signaux périodiques par « répétition ».

Activités et résultats

1. Signaux sinusoïdaux

a. Étude d'un cas particulier

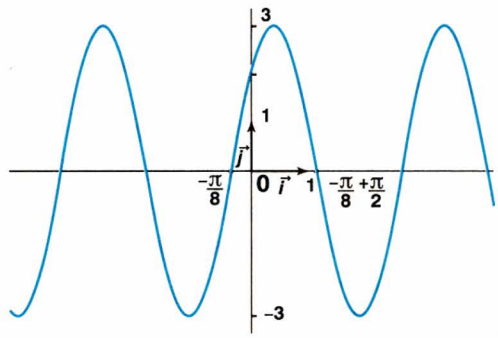
Soit l'intensité i d'un courant définie à tout instant t par $i(t) = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.
(Les intensités sont exprimées en ampère et le temps en seconde.)
Périodicité
La fonction i est périodique de période π :
pour tout t réel, $i(t + \pi) = 3\sin\left(2(t + \pi) + \frac{\pi}{4}\right)$
soit $i(t) = 3\sin\left(2t + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ d'où $i(t) = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Variation
Le sens de variation du signal sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right]$ est donné par le tableau suivant.

t	$-\frac{\pi}{8}$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{7\pi}{8}$
$2t+\frac{\pi}{4}$	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$ ↗	π ↗	$\frac{3\pi}{2}$ ↗	2π
$\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
$3\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$	0 ↗	3 ↘	0 ↘	-3 ↗	0

(sin)

Courbe représentative
Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ on obtient la courbe représentative de i suivante.



b. Étude du cas général $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$
Soit le signal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes réelles telles que $a > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Périodicité
Vérifier que, pour tout t réel, $s\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = s(t)$.

On vérifie, plus généralement, que tout nombre de la forme $k\frac{2\pi}{\omega}$, k entier relatif est une période.
La période fondamentale est $\frac{2\pi}{\omega}$; on écrira $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

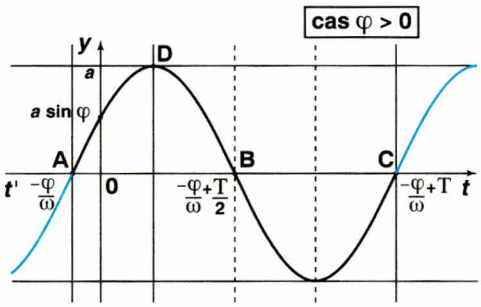
Variation
$\omega t + \varphi$ s'annule pour $t = -\frac{\varphi}{\omega}$; on étudie s sur l'intervalle $\left[-\frac{\varphi}{\omega};-\frac{\varphi}{\omega}+T\right]$.

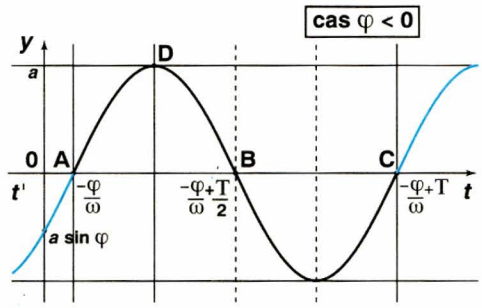
t	$-\frac{\varphi}{\omega}$	$-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}$ $\left(=-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4}\right)$	$-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\pi}{\omega}$ $\left(=-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2}\right)$	$-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3\pi}{2\omega}$ $\left(=-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4}\right)$	$\frac{\varphi}{\omega}+\frac{2\pi}{\omega}$ $\left(=-\frac{\varphi}{\omega}+T\right)$
$\omega t + \varphi$	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$ ↗	π ↗	$\frac{3\pi}{2}$ ↗	2π
$\sin(\omega t + \varphi)$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
$s(t)$	0 ↗	a ↘	0 ↘	$-a$ ↗	0

(sin)

Courbe représentative

La courbe représentative du signal dans le repère orthogonal (O*t*, O*y*) est une sinusoïde.





Faisons le point

On dit qu'un signal s est sinusoïdal, s'il peut être défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes réelles telles que $a > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Pour le signal s : a est l'amplitude, ω est la pulsation et φ est la phase à l'origine.

Le signal s est périodique, de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

La courbe représentative dans un repère orthogonal du signal s est une sinusoïde*.

Méthodes à connaître

Pour tracer la sinusoïde représentative du signal s :

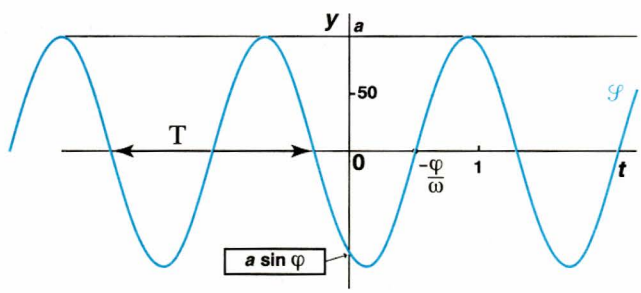
- on place les points A, B et C de l'axe (O*t*) d'abscisses respectives $-\frac{\varphi}{\omega}$, $-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2}$, $-\frac{\varphi}{\omega}+T$;
- on trace les droites d'équation $y = a$ et $y = -a$;
- on place le point D, point d'intersection de la médiatrice de [AB] avec la droite d'équation $y = a$.

Le point d'intersection de la sinusoïde avec l'axe (O*y*) a pour coordonnées $(0 ; a \sin \varphi)$. Les conditions imposées font que φ et $a \sin \varphi$ ont même signe ; ce qui permet de savoir immédiatement dans quel cas on se situe.

Applications directes

Le graphique ci-contre représente, dans le plan rapporté au repère (O*t*, O*y*), la courbe représentative $\mathcal{S}$ d'un signal sinusoïdal u.

Par une lecture graphique suivie de calculs, proposer des valeurs approchées pour l'amplitude a, la période (fondamentale) T, la pulsation ω et la phase à l'origine φ de ce signal sinusoïdal. En déduire pour tout t réel, une expression possible de $u(t)$.



* On appele sinusoïde toute courbe du plan telle qu'il existe un repère $(\Omega X, \Omega Y)$ du plan pour lequel une équation de cette courbe est $Y = \sin X$

Résolution
Estimation graphique de a et T
$a \approx 100$; $T \approx 1{,}6$.
Estimation de ω et de φ
$a \sin \varphi$ est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathcal{S}$ et de l'axe des ordonnées ; donc $a \sin \varphi < 0$ d'où $\varphi < 0$ et $-\frac{\varphi}{\omega} > 0$.

$-\frac{\varphi}{\omega}$ est donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{S}$ avec l'axe (Ot) qui se situe le plus près de O du « côté des abscisses positives » ; d'où $-\frac{\varphi}{\omega} \approx 0{,}5$.

À partir de ces valeurs approchées retenues pour a, T et $-\frac{\varphi}{\omega}$, on peut calculer ω puis φ.
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ soit $\omega \approx \frac{2\pi}{1{,}6}$; $\omega \approx 4$
$\varphi \approx -0{,}5\,\omega$ soit $\varphi \approx -2$.
On en déduit $a \sin \varphi \approx 100 \sin(-2)$ soit $a \sin \varphi \approx -91$, résultat cohérent avec ce qui peut être apprécié sur le graphique.
Expression possible de u (t)
E_1 à E_3 Pour tout t réel, $u(t) \approx 100 \sin(4t - 2)$.

C. Valeur moyenne sur une période

- Soit le signal s, défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2 \sin t$.
La valeur moyenne, sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ du signal est : $\bar{s} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2 \sin t \, dt$.
Vérifier que $\bar{s} = 0$.
- On considère le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 7 \sin(4t - 2)$.
La période fondamentale de s est $\frac{\pi}{2}$ $\left(\omega = 4 ; T = \frac{2\pi}{4}\right)$.

La valeur moyenne $\bar{s}$ du signal s sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ est égale par définition à $\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(t)\,dt$

donc : $\bar{s} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 7 \sin(4t - 2)\,dt$ ou encore $\bar{s} = \frac{14}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(4t - 2)\,dt$.

Calculons $\bar{s}$
Sachant que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \cos(\alpha t + \beta)$ a pour fonction dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto -\alpha \sin(\alpha t + \beta)$, vérifier que, pour $\alpha \neq 0$, la fonction $t \mapsto -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t + \beta)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \sin(\alpha t + \beta)$.

Ainsi : $\bar{s} = \frac{14}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\cos(4t - 2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

soit $\bar{s} = \frac{14}{\pi}\left[-\frac{1}{4}\cos(2\pi - 2) - \left(-\frac{1}{4}\cos(-2)\right)\right]$.

Comme $\cos(2\pi - 2) = \cos(-2) = \cos 2$, on conclut que $\bar{s} = 0$.

Faisons le point

La valeur moyenne $\bar{s}$ d'un signal sinusoïdal s de période fondamentale T est, sur l'intervalle $[0 ; T]$, égale à 0.

$$\boxed{\bar{s} = 0}$$

d. Énergie moyenne

On considère le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 3 \sin(2t + 1)$.

La période fondamentale de s est π $\left(\omega = 2 ; T = \frac{2\pi}{2}\right)$.

L'énergie moyenne E_m, transportée sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par le signal s est égale, par définition à $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (s(t))^2 \, dt$, soit ici $E_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (3\sin(2t+1))^2 \, dt$.

Calculons E_m.

$$E_m = \frac{9}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(2t+1))^2 \, dt.$$

En utilisant la formule de trigonométrie $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$, on obtient :

pour tout réel t, $(\sin(2t + 1))^2 = \frac{1-\cos(4t+2)}{2}$.

Ce résultat permet d'affirmer que le signal dérivé du signal $t \mapsto \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\sin(4t + 1)$ est le signal $t \mapsto \sin(2t + 1))^2$.
(On rappelle que si $f(t) = \sin(\alpha t + \beta)$ alors $f'(t) = \alpha \cos(\alpha t + \beta)$.)

Donc :

$$E_m = \frac{9}{\pi}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\sin(4t+1)\right]_0^{\pi} \quad \text{soit} \quad E_m = \frac{9}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin(4\pi+1) - \left(0 - \frac{1}{8}\sin(1)\right)\right].$$

Comme $\sin(4\pi + 1) = \sin(1)$, on peut conclure que :

$$E_m = \frac{9}{\pi} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{ou encore} \quad E_m = \frac{9}{2} \quad \text{soit} \quad E_m = 4{,}5.$$

Faisons le point

On montre que l'énergie moyenne E_m transportée par le signal sinusoïdal s de période fondamentale T et d'amplitude a est, sur l'intervalle $[0 ; T]$, égale à $\frac{a^2}{2}$.

$$E_m = \frac{a^2}{2}$$

e. Valeur efficace

Par définition, la valeur efficace du signal sinusoïdal s de période fondamentale T est égale à $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} s^2(t)\,dt}$. Donc si a désigne l'amplitude s, $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} s^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$

d'où comme $a > 0$: $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} s^2(t)\,dt} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Faisons le point

La valeur efficace V_{eff} d'un signal sinusoïdal d'amplitude a est égale à $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$V_{\text{eff}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \; ; \quad a = V_{\text{eff}} \times \sqrt{2}$$

Applications directes

Donner les valeurs efficaces des signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 suivants:
$s_1 : t \mapsto 12 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ *et* $s_2 : t \mapsto 10\sqrt{2} \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Résolution
Pour s_1 la valeur efficace est égale à $\frac{12}{\sqrt{2}}$ soit $\frac{12\sqrt{2}}{2}$ ou encore $6\sqrt{2}$; $V_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$.

Pour s_2 la valeur efficace est égale à $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ soit 10 ; $V_{\text{eff}} = 10$.

Remarques

k est un entier naturel non nul.
Si s est un signal sinusoïdal de période fondamentale T et d'amplitude a alors :
– la valeur moyenne de s sur tout intervalle de longueur kT est nulle ;
– l'énergie moyenne transportée par s sur tout intervalle de longueur kT est égale à $\frac{a^2}{2}$.

Pour effectuer les calculs de la valeur moyenne et de l'énergie moyenne on peut donc se placer sur n'importe quel intervalle ayant pour longueur une période.

f. Signaux définis par $t \mapsto k \sin(\alpha t + \beta)$ ou $t \mapsto k \cos(\alpha t + \beta)$

À l'aide des relations vues en trigonométrie, on montre et nous admettrons le résultat suivant.

Faisons le point

Tout signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto k \sin(\alpha t + \beta)$ ou par $t \mapsto k \cos(\alpha t + \beta)$ où k, α et β sont des constantes réelles telles que k et α ne sont pas nulles, est un signal qui peut se mettre sous la forme $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes réelles telles que $a > 0$; $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.
Ces signaux sont donc des signaux sinusoïdaux.
Dans ce cas, la pulsation ω est égale à $|\alpha|$ et l'amplitude a est égale à $|k|$; l'énergie moyenne sur un intervalle de longueur T est donc égale à $k^2/2$.

E$_4$, E$_5$

Application directe

Soit le signal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 10 \sin(2t + 1{,}2)$.
On note s' le signal dérivé de s. Déterminer s'. En déduire que s' est un signal sinusoïdal dont on donnera la pulsation et l'amplitude. Comparer les valeurs efficaces de s et de s'.

Résolution
s' est le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 20 \cos(2t + 1{,}2)$.
C'est donc un signal sinusoïdal de pulsation 2 et d'amplitude 20.
La valeur efficace de s est $\frac{10}{\sqrt{2}}$ celle de s' est $\frac{20}{\sqrt{2}}$. Donc la valeur efficace de s' est le double de la valeur efficace de s.

E$_4$, E$_7$

g. Écriture à l'aide de la période fondamentale ou de la fréquence

Soit le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$.
Si T désigne la période fondamentale du signal sinusoïdal s alors sa fréquence f est définie par $f = \frac{1}{T}$. Donc $\omega = 2\pi f$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Le signal s peut donc être écrit sans utiliser la pulsation ω.
Ainsi, pour tout t réel : $s(t) = a \sin(2\pi f t + \varphi)$ et $s(t) = a \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$.

Application directe

Indiquer la pulsation, la période fondamentale et la fréquence du signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$.

La pulsation est égale à 100π ; la période fondamentale à $\frac{2\pi}{100\pi}$ soit $\frac{1}{50}$ et la fréquence à 50.

2. Construction de signaux périodiques « par répétition »

a. Définition

T étant un réel, on dit que T est une période du signal s défini sur $\mathbb{R}$ si, pour tout t réel, $s(t + T) = s(t)$.
La période fondamentale du signal s est, si elle existe, sa plus petite période strictement positive. (On dit aussi que c'est la période de s.)
Le signal s est dit périodique de période T ou T-périodique si T est une période non nulle de s.

Conséquence
Si T est une période du signal s, alors dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative du signal s est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

b. Construction de signaux périodiques par répétition

Soit le signal u défini sur l'intervalle [0 ; 3[par $x \mapsto x$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note A le point de coordonnées (3 ; 3). La courbe représentative de u est le segment de droite OA privé du point A, on le notera [OA[.

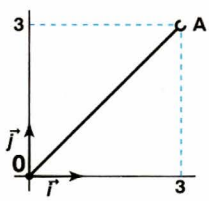


figure a

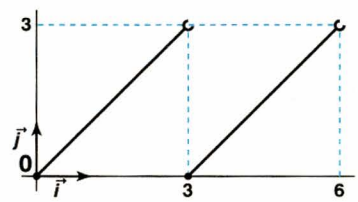
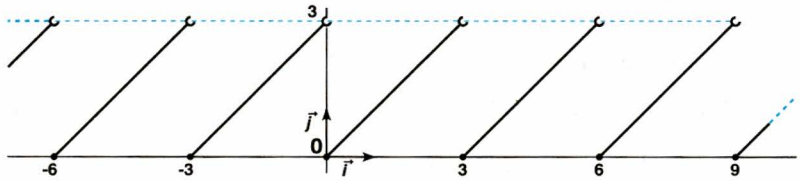


figure b

Construisons l'image de ce segment par la translation de vecteur $3\vec{i}$ (figure b). Plus généralement si on considère l'ensemble des images du segment [OA[obtenues par toutes les translations de vecteur $k(3\vec{i})$, k entier relatif, on obtient la courbe représentative d'un signal défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 3 (3 est ici la période fondamentale de u).

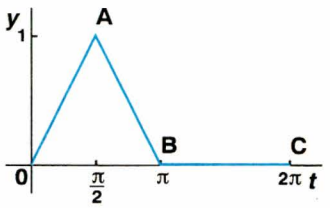


Faisons le point

Plus généralement, à partir d'un signal s_1 défini sur un intervalle $[a\,;\,b[$ ou $]a\,;\,b]$, on peut obtenir un signal s_2 défini sur $\mathbb{R}$ et admettant le nombre $(b-a)$ comme période.
La courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du signal s_2 peut être obtenue à partir de celle du signal s_1 en effectuant des translations de vecteurs $k(b-a)\vec{i}$, k entier relatif.

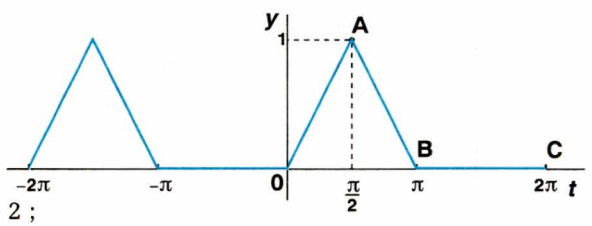
Applications directes

a. *Soit le signal s périodique de période 2 π. La courbe représentative de s considéré sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *est, dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy) constituée des trois segments de droite [OA], [AB] et [BC]. Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives* $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $(\pi\,;0)$ *et* $(2\pi\,;0)$.



Donner l'allure de la courbe représentative de s considéré sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$. *Pour tout t de l'intervalle* $[0, 2\pi]$, *exprimer s (t).*

Résolution
Allure de la courbe.



Exprimons $s(t)$

Pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$: $s(t) = \frac{2t}{\pi}$;

pour $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$: $s(t) = -\frac{2t}{\pi} + 2$;

pour $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$: $s(t) = 0$.

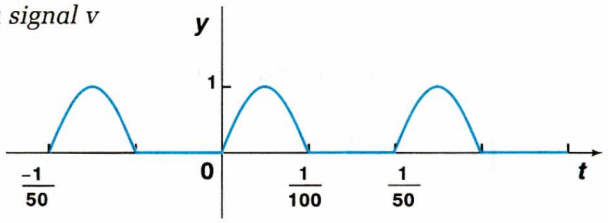
b. *Soit le signal v défini sur* $\mathbb{R}$, *périodique de période* $\frac{1}{50}$ *tel que :*

$v(t) = \sin(100\pi t)$ *si* $0 \leqslant t < \frac{1}{100}$ $\quad$ $v(t) = 0$ *si* $\frac{1}{100} \leqslant t < \frac{1}{50}$.

• *Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) donner la représentation graphique du signal v considéré sur l'intervalle* $\left[-\frac{1}{50}; \frac{2}{50}\right]$.

• *Calculer la valeur moyenne du signal v sur l'intervalle* $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

Résolution
Représentation graphique



Valeur moyenne de v sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$

$$\bar{v} = \frac{1}{\frac{1}{50}} \int_0^{\frac{1}{50}} v(t)\,dt\,; \quad \int_0^{\frac{1}{50}} v(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{100}} v(t)\,dt + \int_{\frac{1}{100}}^{\frac{1}{50}} v(t)\,dt \quad \text{soit}$$

puisque sur $\left[\frac{1}{100}; \frac{1}{50}\right]$, $v(t) = 0$: $\bar{v} = 50 \int_0^{\frac{1}{100}} \sin(100\pi t)\,dt$

d'où : $\bar{v} = 50\left[-\frac{1}{100\pi}\cos(100\pi t)\right]_0^{\frac{1}{100}}$ $\quad$ donc : $\bar{v} = -\frac{50}{100\pi}[\cos(\pi) - 1]$.

Finalement, $\bar{v} = -\frac{1}{2\pi} \times (-2)$ $\quad$ ou $\quad$ $\boxed{\bar{v} = \frac{1}{\pi}}$

E_{12} et E_{13}

BILAN

1. Signaux sinusoïdaux

- **Définitions**

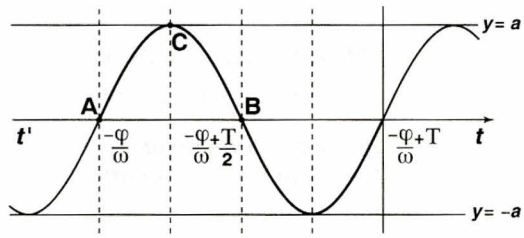
Un signal s est un signal sinusoïdal s'il peut être défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes réelles telles que $a > 0$; $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

a est l'amplitude du signal, ω est sa pulsation et φ est sa phase à l'origine.

La période (fondamentale) T du signal s est égale à $\frac{2\pi}{\omega}$ et sa fréquence à $\frac{1}{T}$.

- **Courbe représentative**

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) la courbe représentative de s est une sinusoïde.
(Ici l'axe (Oy) n'est pas représenté volontairement.)



- **Valeur moyenne**

Si T est une période non nulle du signal sinusoïdal s alors la valeur moyenne de s sur l'intervalle $[0 ; T]$ est nulle :

$$\bar{s} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = 0$$

- **Énergie moyenne**

Si T est une période non nulle du signal sinusoïdal s d'amplitude a alors l'énergie moyenne transportée par le signal s sur l'intervalle $[0 ; T]$ est égale à $\frac{a^2}{2}$.

$$E_m = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt = \frac{a^2}{2}$$

- **Valeur efficace**

Si s est un signal sinusoïdal d'amplitude a alors sa valeur efficace est égale à $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{E_m} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

2. Autres signaux périodiques

- **Définition**

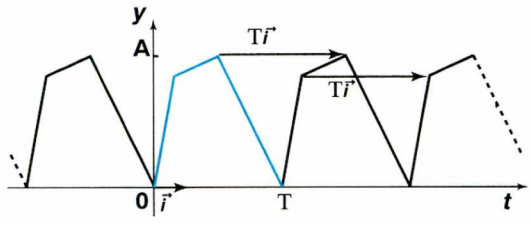
T étant un réel, on dit que T est une période du signal s défini sur $\mathbb{R}$ si, pour tout t réel, $s(t + T) = s(t)$.

La période fondamentale du signal périodique s est, si elle existe, sa plus petite période strictement positive (on dit aussi que si c'est la période de s).

Le signal s est dit périodique de période T si T est une période non nulle de s.

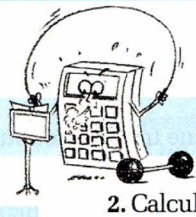
Construction d'un signal périodique par répétition

Si T désigne la période fondamentale du signal, on utilise des translations successives de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$.



Valeur et énergie moyennes

$$\bar{s} = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt \quad \text{et} \quad E_m = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt$$



POUR S'ENTRAÎNER

EXERCICE 1

Soit le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2\sin(2t+1)$.

1. Calculer la période (fondamentale) de s. On note T cette période.

2. Dresser le tableau de variation de s considéré sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; T-\frac{1}{2}\right]$.

3. Construire dans le plan rapporté à un repère orthogonal la courbe représentative de s sur l'intervalle $[-T\,;\,3T]$.

EXERCICE 2

Soit le signal sinusoïdal u défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 3\sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1. On note t_0 le nombre tel que : $200\pi t_0 + \frac{\pi}{3} = 0$.
Donner la valeur exacte de t_0.

2. Calculer la période (fondamentale) de u.

3. Dresser le tableau de variation de u considéré sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{600}; \frac{5}{600}\right]$.

4. Construire dans un repère orthogonal la courbe représentative de u sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{600}; \frac{5}{600}\right]$.

EXERCICE 3

On considère le signal i défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. On note t_0 le nombre tel que : $100\pi t_0 - \frac{\pi}{4} = 0$.
Donner la valeur exacte de t_0.

2. Calculer la période (fondamentale) du signal i.

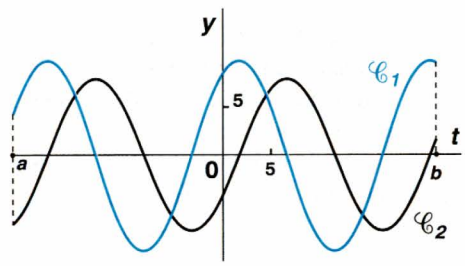
3. Indiquer quelle est l'amplitude de i.

4. Le plan étant rapporté à un repère orthogonal tel que, en abscisse 1 cm représente $\frac{1}{400}$ et en ordonnée 2,5 cm représentent 10.

a. Tracer les droites d'équation $y = 10\sqrt{2}$; $y = -10\sqrt{2}$; $t = \frac{1}{400}$; $t = \frac{9}{400}$.

b. Donner l'allure de la courbe représentative du signal i considéré sur l'intervalle $\left[\frac{1}{400}; \frac{9}{400}\right]$ puis sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{400}; \frac{10}{400}\right]$.

EXERCICE 4



Les signaux i_1 et i_2 sont des signaux sinusoïdaux définis sur $\mathbb{R}$.
Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentent dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy) respectivement les signaux i_1 et i_2 considérés sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

1. Par une lecture graphique, proposer pour chacun de ces signaux : une valeur pour son amplitude, une valeur pour sa période fondamentale, le signe de sa phase à l'origine.

2. En utilisant les valeurs proposées en **1.** et éventuellement une lecture graphique, déterminer, pour chacun de ces signaux, ce que pourrait être :
a. La phase à l'origine, sachant que celle-ci est de la forme $\frac{\pi}{K}$ où K est un entier relatif non nul.
b. L'énergie moyenne transportée sur un intervalle ayant la période fondamentale pour longueur.
c. La valeur efficace.

EXERCICE 5

Pour chacun des signaux sinusoïdaux s_1, s_2, s_3, s_4 suivants :
1. Préciser son amplitude et sa période (fondamentale) notée T.
2. Calculer l'énergie moyenne transportée sur l'intervalle $[0 ; T]$.
3. Déterminer sa valeur efficace :
$s_1 : t \mapsto 40 \sin (100 \pi t + 3)$;
$s_2 : t \mapsto 10 \sqrt{2} \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$;
$s_3 : t \mapsto 2 \cos (3 t - 8)$;
$s_4 : t \mapsto 100 \sqrt{2} \sin (4 (t + \pi))$.

EXERCICE 6

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$; $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$
$\sin (\alpha + \pi) = -\sin \alpha$; $\cos (\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$ et $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$

En utilisant le formulaire ci-dessus, écrire chacun des signaux sinusoïdaux suivants sous la forme $t \mapsto a \sin (\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$; $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.
$s_0 : t \mapsto \cos t$; $s_1 : t \mapsto -4 \cos (2 t + 3)$;
$s_2 : t \mapsto -2 \sin (\pi t + 1)$;
$s_3 : t \mapsto 72 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

EXERCICE 7

Indiquer la phase à l'origine des signaux sinusoïdaux, définis sur $\mathbb{R}$, suivants :
$s_1 : t \mapsto 10 \sin\left(3\pi t + \frac{5\pi}{2}\right)$;
$s_2 : t \mapsto 127 \sin (100 \pi t - 5 \pi)$;
$s_3 : t \mapsto 10 \sqrt{2} \sin\left(200\pi t - \frac{13\pi}{4}\right)$;
$s_4 : t \mapsto 2 \sin (100 \pi t + 12)$.

EXERCICE 8

On considère le signal f défini sur $\mathbb{R}$, impair, périodique de période 2π tel que :
– pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$: $f(t) = t$;
– pour $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$: $f(t) = \pi - t$.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Ot, Oy) où sur chaque axe 4 centimètres représentent π :
– Tracer la courbe représentative de f considérée sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
– Compléter le tracé précédent pour obtenir la courbe représentative de f considéré sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

EXERCICE 9

On considère les signaux u_1, u_2, u_3 et u_4 de la variable t. Ces signaux sont définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques.
T désigne la période fondamentale du signal considéré.
Pour chaque signal du tableau ci-dessous, donner la courbe représentative pour $T \leqslant t \leqslant 2T$, puis calculer la valeur moyenne sur une période (on prendra soit l'intervalle $[0 ; T]$ soit l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$).

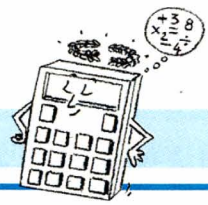
Signal	T : période fondamentale	Définition du signal
u_1	100	$\begin{cases} u_1(t) = 10 & \text{pour } 0 \leqslant t < 50 \\ u_1(t) = -10 & \text{pour } 50 \leqslant t < 100 \end{cases}$
u_2	$\frac{1}{50}$	$\begin{cases} u_2(t) = \frac{t}{10} & \text{pour } 0 < t \leqslant \frac{1}{100} \\ u_2(t) = -\frac{t}{10} & \text{pour } -\frac{1}{100} < t \leqslant 0 \end{cases}$
u_3	π	$u_3(t) = -\frac{2t}{3}$ pour $-\frac{\pi}{2} \leqslant t < \frac{\pi}{2}$
u_4	10	$u_4(t) = -t$ pour $0 \leqslant t < 10$

EXERCICE 10

On considère le signal u défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période 8 tel que :

$$\begin{cases} u(t) = 1 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ u(t) = 3 & \text{pour } 1 \leqslant t < 2 \\ u(t) = 5 & \text{pour } 2 \leqslant t < 3 \\ u(t) = -1 & \text{pour } 3 \leqslant t < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) = 2 & \text{pour } 4 \leqslant t < 5 \\ u(t) = -2 & \text{pour } 5 \leqslant t < 6 \\ u(t) = 4 & \text{pour } 6 \leqslant t < 7 \\ u(t) = 0 & \text{pour } 7 \leqslant t < 8. \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, donner la représentation graphique du signal u considéré sur l'intervalle $[-4 ; 16]$.
2. Calculer la valeur moyenne et l'énergie moyenne transportée par ce signal sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.



LE JOUR DU BAC

Énoncé

1. On considère le signal sinusoïdal u_1 , de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ par
$u_1(t) = 540 \sin(100\pi t)$.
La période de u_1 est notée T dans tout le problème.
Donner la valeur exacte de T.

2. Les signaux sinusoïdaux u_2 et u_3, de la variable t, sont définis sur $\mathbb{R}$ par :
$u_2(t) = 540 \sin\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ et
$u_3(t) = 540 \sin\left(100\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$.
Indiquer quelle est la période de u_2, puis celle de u_3.
(On donnera les valeurs exactes.)

3. La figure a (voir ci-dessous) donne des parties des représentations graphiques dans le plan rapporté au repère (Ot, Ou) des trois signaux u_1, u_2 et u_3.
a. Calculer $u_2(0)$; $u_3(0)$. (On donnera les valeurs exactes.)

b. Indiquer quelle est la couleur ou la nature du trait utilisé pour :
– la partie de la courbe $\mathscr{C}_1$ représentative de u_1;
– la partie de la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de u_2 ;
– la partie de la courbe $\mathscr{C}_3$ représentative de u_3.

4. Sur la figure b (voir page suivante) :
– le point A d'abscisse t_1, est le point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$;
– le point B d'abscisse t_2, est le point d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_3$;
– le trait bleu, indique une partie de la courbe représentative dans le plan rapporté au repère (Ot, Ou) d'un signal périodique noté u.
Par lecture graphique, indiquer quelle pourrait être la période de u.

5. On admet que la période de u est égale à $\frac{T}{3}$.
a. Donner la valeur exacte de la période de u.

figure a

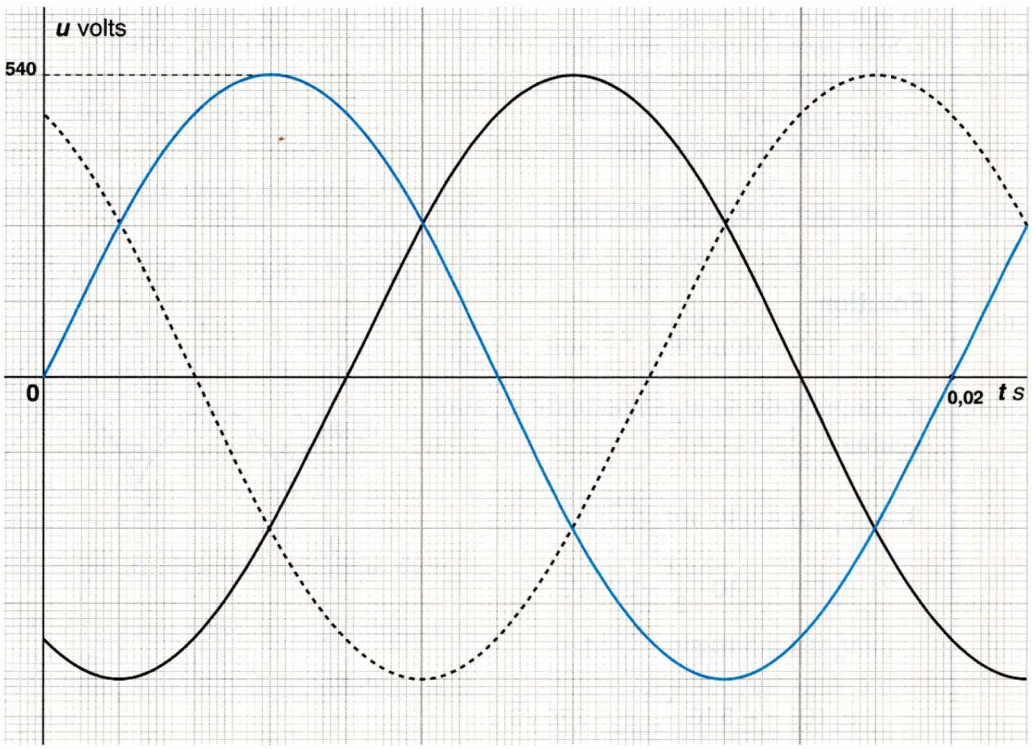
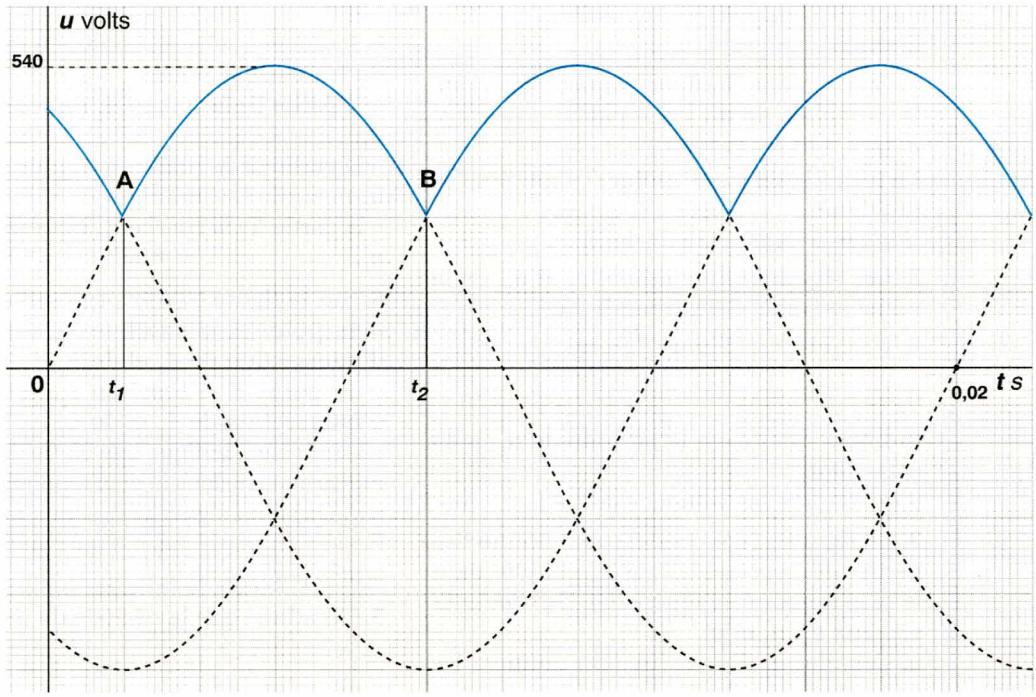


figure b



b. Sachant que $t_2 - t_1 = \frac{T}{3}$, indiquer, en prenant pour t_1 la valeur 0,0017, quelle est la valeur de t_2 à retenir.
(On prendra la valeur arrondie à 10^{-4}.)

6. Calcul de la valeur moyenne du signal u sur une période.

a. Pourquoi peut-on écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} u_1(t)\,dt \text{ ?}$$

b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $t \mapsto \sin(100\,\pi t)$.

c. La valeur moyenne $\overline{u}$ du signal u sur une période est donc égale à :

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} 540 \sin(100\,\pi t)\,dt.$$

Calculer la valeur arrondie à l'unité de $\overline{u}$.

Solution

1. $\omega = 100\,\pi$ donc $T = \frac{2\pi}{\omega}$ soit $T = \frac{1}{50}$.

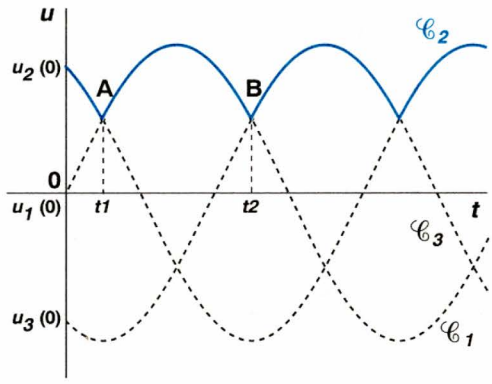
2. La période de u_2 et celle de u_3 sont égales à $\frac{1}{50}$.

3. a. $u_2(0) = 540 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$;

$u_2(0) = 540\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 270\sqrt{3}$;

$u_3(0) = 540 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$;

$u_3(0) = -540\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -270\sqrt{3}$.



b. La partie de $\mathscr{C}_1$ est tracée en bleu, la partie de $\mathscr{C}_2$ en trait pointillé noir et la partie de $\mathscr{C}_3$ en trait plein noir.

4. La période semble être égale à $t_2 - t_1$, soit par lecture graphique à $\frac{0{,}02}{3}$ soit $\frac{1}{150}$.

5. a. La période de u est égale à $\frac{1}{150}$.

b. $t_2 = \frac{T}{3} + t_1$ donc $t_2 = \frac{1}{150} + 0{,}0017$.

La valeur de t_2 arrondie à 10^{-4} est égale à 0,0084.

6. a. Pour tout t de l'intervalle $[t_1 ; t_2]$, $u(t) = u_1(t)$.

b. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \sin(100\pi t)$ est $t \mapsto -\frac{1}{100\pi}\cos(100\pi t)$.

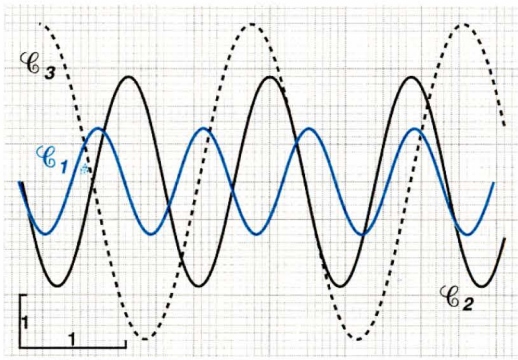
c. $\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} 540 \sin(100\pi t)\,dt = 150 \times 540 \times \left[-\frac{1}{100\pi}\cos(100\pi t)\right]_{t_1}^{t_2}$.

On obtient 448.

POUR APPROFONDIR

PROBLÈME 1 ●●

Le graphique suivant représente, dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O*t*, O*y*) les courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des signaux sinusoïdaux s_1, s_2 et s_3.



On note :

a_1, a_2, a_3 les amplitudes respectives de s_1, s_2 et s_3 ;

T_1, T_2, T_3 les périodes (fondamentales) respectives de s_1, s_2 et s_3 ;

φ_1, φ_2, φ_3 les phases à l'origine respectives de s_1, s_2 et s_3.

1. Sachant que la phase à l'origine φ_1 de s_1 est égale à $-\frac{\pi}{4}$, donner une position possible de l'origine O et des axes (O*t*) et (O*y*) du repère (O*t*, O*y*).

2. Un choix pour le repère (O*t*, O*y*) ayant été retenu, par une lecture graphique, donner les signes de φ_2 et de φ_3.

Proposer des valeurs pour φ_2 et φ_3.

PROBLÈME 2 ●● ✔

On considère le signal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 4\sin(4\pi t + 10) + 5$.

1. Montrer que s est périodique de période $\frac{1}{2}$.

2. On note u le signal sinusoïdal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 4\sin(4\pi t + 10)$.

Donner les valeurs exactes des nombres A et B tels que :

$$A = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (u(t))^2\,dt \quad \text{et} \quad B = 2\int_0^{\frac{1}{2}} u(t)\,dt.$$

3. Montrer que la valeur moyenne de s sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ est égale à $B + 5$.

En déduire la valeur moyenne de s sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

4. Après avoir constaté que pour tout t réel, $(s(t))^2 = (u(t))^2 + 10\,u(t) + 25$ montrer que :

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} (s(t))^2\,dt = A + 25.$$

En déduire la valeur efficace de s (on donnera la valeur exacte).

PROBLÈME 3 ●● ✔

Pour chacun des signaux v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 suivants définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques :

1. Donner la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. Calculer la valeur moyenne sur un intervalle ayant pour longueur sa période fondamentale.

Signal	T : période fondamentale	Définition du signal
v_1	2π	$\begin{cases} v_1(t) = 2\sin(t) & \text{pour } 0 < t \leqslant \pi \\ v_1(t) = -\sin(t) & \text{pour } \pi < t \leqslant 2\pi \end{cases}$
v_2	10	$\begin{cases} v_2(t) = 4\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) & \text{pour } 0 \leqslant t < 5 \\ v_2(t) = 0 & \text{pour } 5 \leqslant t < 10 \end{cases}$
v_3	π	$v_3(t) = 2\cos(t)$ pour $0 \leqslant t < \pi$
v_4	10	$v_4(t) = \frac{t^2}{2}$ pour $-5 \leqslant t < 5$
v_5	1	$v_5(t) = t - t^2$ pour $0 \leqslant t < 1$

PROBLÈME 4 ●● ✔

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on note (Ot) l'axe des abscisses et (Oy) celui des ordonnées.

1. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en son point d'abscisse (1,7).

2. a. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, construire :

– La courbe $\mathscr{C}$ représentative du signal f, de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période π tel que pour tout t de l'intervalle $[0 ; \pi]$, $f(t) = \sin t$.

– La droite (T) représentative du signal g, de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = (t - 1{,}7)\cos(1{,}7) + \sin(1{,}7)$.

b. La droite (T) coupe la courbe $\mathscr{C}$ au point M_1 dont l'abscisse t_1 est comprise entre π et $3\,\frac{\pi}{2}$.

Par une lecture graphique, proposer une valeur approchée de t_1.

3. Dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ donner la courbe représentative du signal u, de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période π tel que :

$$\begin{cases} \text{si } 1{,}7 \leqslant t \leqslant t_1 & \text{pour } u(t) = g(t) \\ \text{si } t_1 \leqslant t \leqslant \pi + 1{,}7 & \text{pour } u(t) = f(t). \end{cases}$$

PROBLÈME 5 ●●

1. Montrer que pour tout θ réel,

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

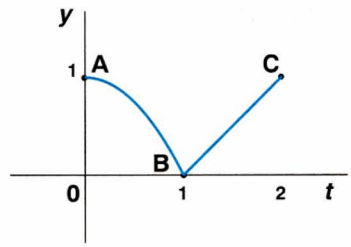
2. En déduire la construction de la courbe représentative du signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{3}\right)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy).

PROBLÈME 6 BAC PRO

Dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy), le graphique suivant $\mathscr{G}$ est constitué :

– de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$, qui est la représentation du signal $t \mapsto 1 - t^2$ considéré sur l'intervalle $[0 ; 1]$;

– du segment [BC], tel que le point C a pour coordonnées (2 ; 1).



Le signal s est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2.

Sachant que dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy), la courbe représentative de s considéré sur l'intervalle $[0 ; 2]$ est le graphique $\mathscr{G}$:

1. Construire la courbe représentative de s considéré sur l'intervalle $[-2 ; 6]$.

2. Pour tout t de l'intervalle $[0 ; 2]$, exprimer $s(t)$ en fonction de t.

3. Calculer la valeur moyenne et l'énergie moyenne transportée par le signal s sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

4. Déterminer la valeur efficace de s.

6

SOMME DE DEUX SIGNAUX PÉRIODIQUES

Objectifs

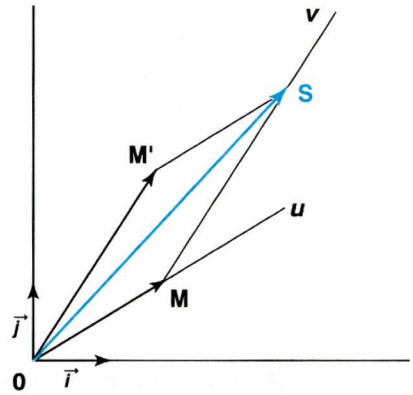
- **Savoir construire, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, la représentation graphique de la somme de deux signaux périodiques.**
- **Savoir déterminer l'amplitude et la phase à l'origine :**
  – de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même période fondamentale ;
  – d'un signal sinusoïdal exprimé en sinus et cosinus.

Pour prendre un bon départ

1. Étude d'une configuration

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le parallélogramme OMSM′ tel que :

$$\begin{cases} \| \overrightarrow{OM} \| = 2 \text{ et mesure principale, en radian, de } \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = 0{,}55 \\ \| \overrightarrow{OM'} \| = 3 \text{ et mesure principale, en radian, de } \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}\right) = 1. \end{cases}$$



a. Donner l'une des mesures, en radian, de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, puis de l'angle de demi-droites ([Mu), [M v)) (voir figure).

b. Dans le triangle OMS, montrer que $\|\overrightarrow{OS}\|^2 = 13 - 12 \cos(\pi - 0{,}45)$. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de $\|\overrightarrow{OS}\|$.

c. Dans le triangle OMS, montrer que $\sin(\widehat{MOS}) = \dfrac{3 \sin\left(\widehat{OMS}\right)}{\|\overrightarrow{OS}\|}$.

En considérant la figure et en utilisant la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} de la mesure principale, en radian, de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OS})$.

2. Modules et arguments de nombres complexes

Soient les quatre nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4 suivants :
$z_1 = 2 + 3j$; $z_2 = -1 - 2j$; $z_3 = -3 + j$ et $z_4 = 4 - 5j$.

a. Représenter ces quatre nombres dans le plan complexe.

b. On note $\mathcal{R}\text{e}\ z$, $\mathcal{I}\text{m}\ z$ et $|z|$, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de z ; compléter le tableau ci-contre.

z		z_1	z_2	z_3	z_4
$\mathcal{R}\text{e}\ z$		2		-3	
$\mathcal{I}\text{m}\ z$		3		1	
$\lvert z\rvert$	valeur exacte	$\sqrt{13}$		$\sqrt{10}$	
	valeur arrondie à 10^{-2}	3,61		3,16	

c. On note Arg z l'argument principal de z ($-\pi < \text{Arg}\ z \leqslant \pi$) ; en utilisant la fonction $\tan^{-1}$ de la calculatrice, compléter le tableau suivant (on y écrira les valeurs arrondies à 10^{-2}).

Dans la suite du cours, lors de l'utilisation en mode radian de la séquence calculatrice : a $\boxed{\tan^{-1}}$ on notera $\tan^{-1}(a)$ le nombre cherché (a réel donné).

z	z_1	z_2	z_3	z_4
$\dfrac{\mathcal{I}\text{m}\ z}{\mathcal{R}\text{e}\ z}$	$\dfrac{3}{2}$	2	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{5}{4}$
$\tan^{-1}\left(\dfrac{\mathcal{I}\text{m}\ z}{\mathcal{R}\text{e}\ z}\right)$	0,98	1,11		
Arg z	0,98	$-2,04$		

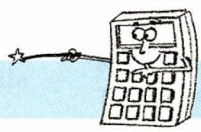
Éléments de réponse

1. a. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 1 - 0,55 = 0,45\ [2\pi]$
$([\text{M}u), [\text{M}v)) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

b.
$\|\overrightarrow{OS}\| \approx 4,88$.

c.
$(\vec{i}, \overrightarrow{OS}) \approx 0,82$.

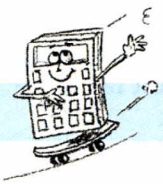
2. c.
Les valeurs arrondies à 10^{-2} sont :
2,82 pour Arg z_3
et $-0,90$ pour Arg z_4.



Posons le problème

À partir de signaux périodiques donnés, on peut envisager d'en construire d'autres en utilisant les opérations telles que :
– le produit d'un signal par un nombre réel,
– l'addition d'une constante réelle à un signal,
– l'addition de deux signaux.
La première partie propose d'étudier des exemples illustrant l'utilisation de ces différentes opérations.
Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons à la somme de deux signaux sinusoïdaux de même période fondamentale.

La troisième partie nous conduira à mettre en évidence l'écriture en sinus et cosinus d'un signal sinusoïdal. Pour terminer, nous étudierons un exemple de somme de deux signaux sinusoïdaux de périodes fondamentales différentes mais ayant une période commune.



Activités et résultats

1. Construction de signaux périodiques

a. Étude d'exemples

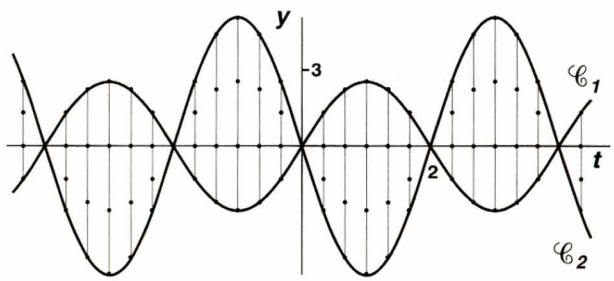
Dans ce paragraphe, nous utiliserons les méthodes données au chapitre « Fonctions numériques. Activités » du tome 1 qui permettent d'obtenir, dans un repère orthogonal, à partir des courbes représentatives des fonctions f et g, les courbes représentatives des fonctions $f + g$, λf, $f + k$ où λ et k désignent deux réels donnés.

Exemple 1

On considère le signal s_1 défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement représentatives des signaux s_1 et $-2\ s_1$.

- On obtient la figure ci-contre

On constate que s_1 et s_2 ont même période fondamentale 4.
(Pour le démontrer on calcule les périodes fondamentales des deux signaux sinusoïdaux s_1 et $-2\ s_1$.)

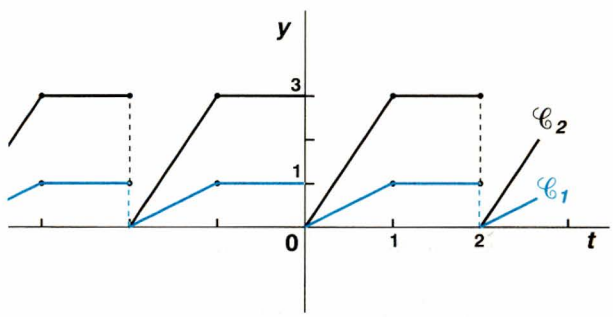


Exemple 2

On considère le signal s_1 défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, tel que $s_1(t) = t$ pour $0 \leqslant t < 1$ et $s_1(t) = 1$ pour $1 \leqslant t < 2$.
Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement représentatives des signaux s_1 et $3\ s_1$.

- On obtient les courbes ci-contre

On constate que les signaux s_1 et s_2 ont même période fondamentale 2.



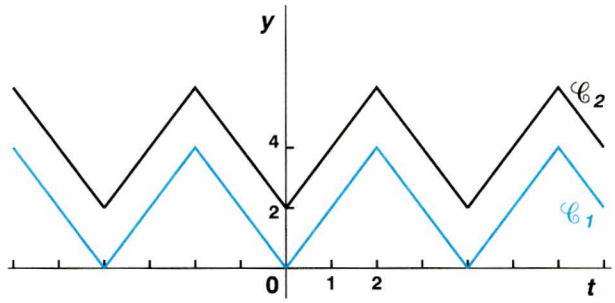
Exemple 3

On considère le signal s_1 défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 4 tel que :

$$\begin{cases} s_1(t) = 2t & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s_1(t) = -2t & \text{si } -2 \leqslant t < 0. \end{cases}$$

On note s_2 le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto s_1(t) + 2$.
Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement représentatives des signaux s_1 et s_2.

- On obtient les courbes ci-contre
On constate que s_1 et s_2 sont deux signaux périodiques ayant la même période fondamentale 4.

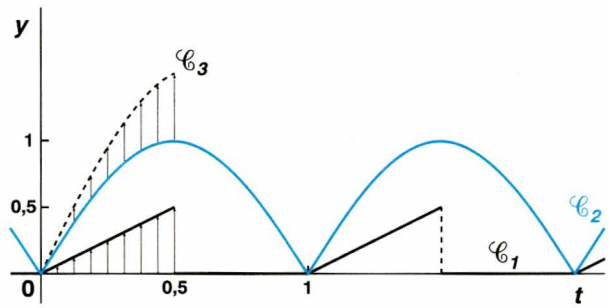


Exemple 4
On considère les signaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 1 tels que :

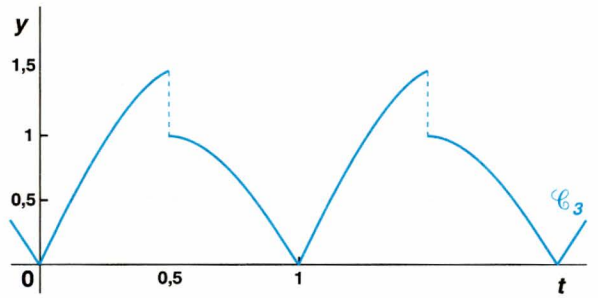
- $\begin{cases} s_1(t) = t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 0{,}5 \\ s_1(t) = 0 & \text{si} \quad 0{,}5 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$
- $s_2(t) = \sin(\pi t)$ pour $0 \leqslant t < 1$.

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal construire les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ représentatives respectivement de s_1, s_2 et $s_1 + s_2$.

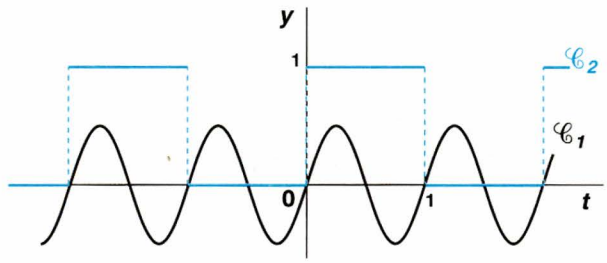
- On obtient l'arc de $\mathscr{C}_3$ sur [0 ; 0,5[:
On constate que :
s_1 a pour période fondamentale 1 ;
s_2 a pour période fondamentale 1.



D'où la courbe $\mathscr{C}_3$:
On constate que :
$s_1 + s_2$ a pour période fondamentale 1.

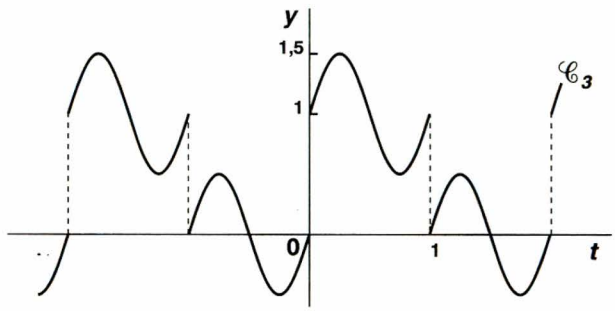


Exemple 5
On considère le signal s_1 défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 0{,}5 \sin(2\pi t)$ et le signal s_2 défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2 tel que $s_2(t) = 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $s_2(t) = 0$ pour $1 < t < 2$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Ot, Oy) construire les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$



et $\mathscr{C}_3$ respectivement représentatives des signaux s_1, s_2 et $s_1 + s_2$ ($s_1 + s_2$ est noté s_3).

- On obtient page précédente $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et ci-contre $\mathscr{C}_3$. On constate que :
s_1 est périodique de période fondamentale 1 $\left(\frac{2\pi}{\omega} = 1\right)$;
s_2 est périodique de période fondamentale 2 ;
s_3 somme de s_1 et de s_2 est périodique de période fondamentale 2.



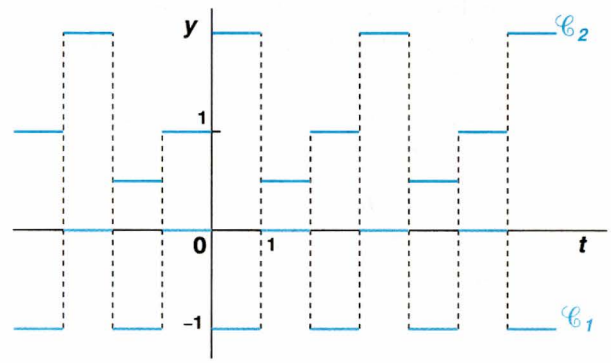
Exemple 6
On considère les deux signaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ tels que :

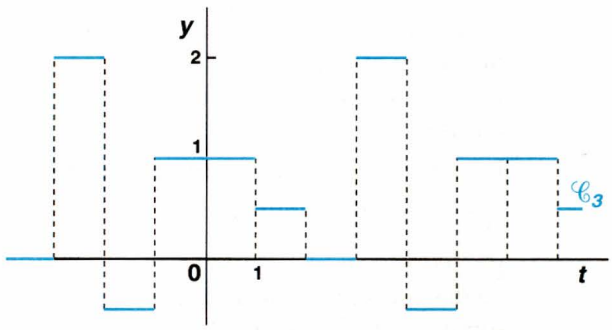
- s_1 est périodique de période 2 et $\begin{cases} s_1(t) = -1 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ s_1(t) = 0 & \text{pour } 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$

- s_2 est périodique de période 3 et $\begin{cases} s_2(t) = 2 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ s_2(t) = \frac{1}{2} & \text{pour } 1 \leqslant t < 2 \\ s_2(t) = 1 & \text{pour } 2 \leqslant t < 3. \end{cases}$

Construire dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy) les courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des signaux s_1, s_2 et $s_1 + s_2$ (on note s_3 la somme $s_1 + s_2$).

- On obtient les courbes ci-contre
On constate que :
s_1 est périodique de période fondamentale 2 ;
s_2 est périodique de période fondamentale 3 ;
s_3 (c'est-à-dire $s_1 + s_2$) est périodique de période fondamentale 6.





b. Cas général

- Si λ est un réel et u un signal défini sur $\mathbb{R}$ périodique de période T alors λu est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
En effet : pour tout t réel, $(\lambda u)(t + T) = \lambda(u(t + T))$ et $\lambda(u(t + T)) = \lambda u(t)$.

- Si k est un réel et v un signal défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période T alors $v + k$ est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
En effet pour tout t réel, $(v + k)(t + T) = v(t + T) + k$ et $v(t + T) + k = v(t) + k$.
- Si u et v sont deux signaux définis sur $\mathbb{R}$, périodiques de période commune T alors $u + v$ est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
En effet pour tout t réel, $(u + v)(t + T) = u(t + T) + v(t + T)$ et
$u(t + T) + v(t + T) = u(t) + v(t)$.
Nous retiendrons les résultats suivants.

Faisons le point

Si λ et k sont des réels et si u et v sont des signaux périodiques de période T alors λu, $v + k$ et $u + v$ sont des signaux périodiques de période T.

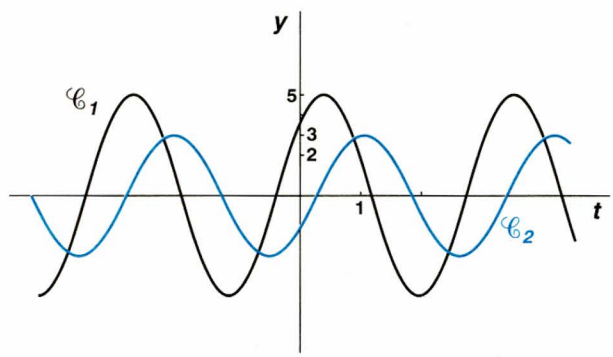
2. Somme de deux signaux sinusoïdaux de même période fondamentale

a. Représentation graphique

Soit les deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par $t \mapsto 5 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $t \mapsto 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$.

Ces deux signaux ont même période fondamentale $\frac{2\pi}{2}$ soit π.

Dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy), les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de s_1 et de s_2 sont données par la figure suivante.



Nous nous proposons de construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ du signal $s_1 + s_2$ et d'interpréter la courbe obtenue.

Méthode de construction

Pour construire la courbe $\mathscr{C}$, distinguons les deux étapes suivantes :

– on construit la courbe $\mathscr{C}_3$ représentative du signal $s_3 = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$;

– on construit la courbe représentative du signal $2\,s_3$ puisque $2\,s_3 = s_1 + s_2$ la courbe obtenue est la courbe $\mathscr{C}$.

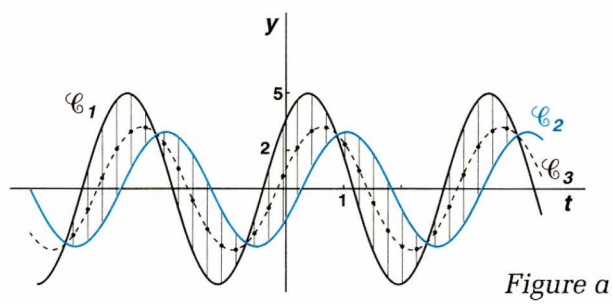


Figure a

- La courbe $\mathscr{C}_3$ représentative de $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$ s'obtient (figure a) par la procédure des milieux (c'est la « courbe des milieux » vue au chapitre 4 du tome 1 dans l'exercice 5).

- La courbe représentative du signal $s_1 + s_2$ est la courbe $\mathscr{C}$ (figure b).

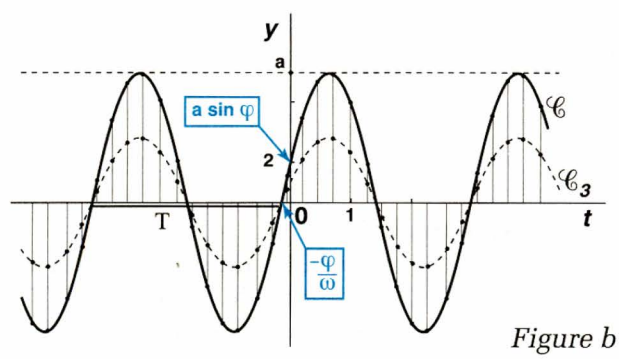


Figure b

Interprétation

La figure b suggère que la courbe $\mathscr{C}$ est une sinusoïde.

Il semble donc que le signal s somme de s_1 et de s_2 est un signal sinusoïdal et nous l'admettrons.

Vérifier que le signal s est périodique, de période π.

De l'observation du graphique, on conjecture les résultats suivants :

– s a même période fondamentale que s_1 et s_2 soit π ;

la pulsation de s notée ω est donc égale à $\frac{2\pi}{\pi}$ soit 2.

– l'amplitude de a de s est telle que $a \approx 6{,}5$;

– la phrase à l'origine φ de s est strictement positive ($a \sin \varphi > 0$) et $-\frac{\varphi}{\omega} \approx -0{,}16$ d'où $\varphi \approx 0{,}32$. On remarque par le calcul que $a \sin \varphi \approx 6{,}5 \times 0{,}32$ soit $a \sin \varphi \approx 2$, ce qui correspond à la valeur obtenue par lecture graphique ;

Le signal s peut donc être assimilé au signal sinusoïdal :

$t \mapsto 6{,}5 \sin (2\,t + 0{,}32)$

Nous admettrons le résultat suivant.

Faisons le point

La somme de deux signaux sinusoïdaux de même période fondamentale T, si elle n'est pas nulle, est aussi un signal sinusoïdal de période fondamentale T.

b. Calcul de l'amplitude et de la phase

Soit les signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 de même période fondamentale.

Le signal s_1 a pour amplitude a_1 et pour phase à l'origine φ_1.

Le signal s_2 a pour amplitude a_2 et pour phase à l'origine φ_2.

Voici deux méthodes pour calculer l'amplitude et la phase à l'origine du signal $s_1 + s_2$.

Méthode de Fresnel

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal positif $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on associe :

– au signal s_1, le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ tel que $\| \overrightarrow{OM}_1 \| = a_1$ et tel que l'une des mesures en radian de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_1})$ est égale à φ_1 ;

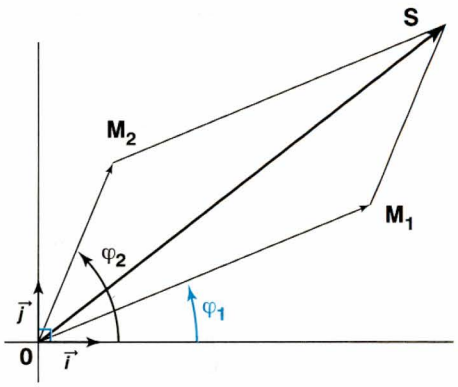
– au signal s_2, le vecteur $\overrightarrow{OM}_2$ tel que $\| \overrightarrow{OM}_2 \| = a_2$ et tel que l'une des mesures en radian de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_2})$ est égale à φ_2.

Le vecteur $\overrightarrow{OS}$ somme de $\overrightarrow{OM}_1$ et de $\overrightarrow{OM}_2$ est alors associé au signal $s_1 + s_2$ de sorte que :

– la norme de $\overrightarrow{OS}$ est égale à l'amplitude du signal $s_1 + s_2$;

– la mesure principale, en radian, de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OS})$ est égale à la phase à l'origine du signal $s_1 + s_2$.

Le diagramme de principe est le suivant.



Une lecture graphique de ce diagramme peut donner des ordres de grandeur pour l'amplitude et la phase à l'origine de $s_1 + s_2$.

Un calcul utilisant les relations vues dans le triangle quelconque permet de déterminer les valeurs de l'amplitude et de la phase à l'origine de $s_1 + s_2$.

Application directe

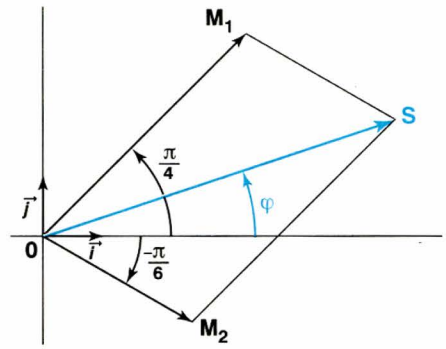
Calculer l'amplitude a et la phase à l'origine φ de la somme s des signaux définis sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 5 \sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ et $t \mapsto 3 \sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$.

Résolution

Les deux signaux ont même pulsation 2.

Le signal $t \mapsto 5 \sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}_1$ tel que $\|\overrightarrow{OM_1}\| = 5$ et tel que l'une des mesures en radian, de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}_1)$ est égale à $\frac{\pi}{4}$.

Le signal $t \mapsto 3 \sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}_2$ tel que $\|\overrightarrow{OM_2}\| = 3$ et tel que l'une des mesures en radian, de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}_2)$ est égale à $-\frac{\pi}{6}$.



Le signal $t \mapsto 5 \sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$ est donc représenté par le vecteur $\overrightarrow{OS}$ somme de $\overrightarrow{OM}_1$ et de $\overrightarrow{OM}_2$.

Évaluation par lecture graphique

À l'aide d'une règle graduée, on obtient $\|\overrightarrow{OS}\| \approx 6{,}5$; $a \approx 6{,}5$.

À l'aide d'un rapporteur, on obtient en degré, mes $(\vec{i}, \overrightarrow{OS}) \approx 18$ d'où en radian, mes $(\vec{i}, \overrightarrow{OS}) \approx 0{,}31$ donc $\varphi \approx 0{,}31$.

Calculs

- Calculons $\|\overrightarrow{OS}\|$. Dans le triangle OM_1S :

$\|\overrightarrow{OS}\|^2 = \|\overrightarrow{OM_1}\|^2 + \|\overrightarrow{M_1S}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OM_1}\|\|\overrightarrow{M_1S}\| \cos(\widehat{OM_1S})$ $\|\overrightarrow{M_1S}\| = \|\overrightarrow{OM_2}\| = 3$.

La mesure en radian de $\widehat{OM_1S}$ est égale à $\pi - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ soit $\frac{7\pi}{12}$.

Donc : $\|\overrightarrow{OS}\|^2 = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ $\|\overrightarrow{OS}\|^2 = 34 - 30 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

D'où : $\|\overrightarrow{OS}\| = \sqrt{34-30\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$. La valeur arrondie de $\|\overrightarrow{OS}\|$ à 10^{-2} est 6,46 d'où $a \approx 6{,}46$.

- Calculons en radian, la mesure principale de $(\vec{i}, \overrightarrow{OS})$. Dans le triangle OM_1S :

$$\frac{\|\overrightarrow{M_1S}\|}{\sin(\widehat{M_1OS})} = \frac{\|\overrightarrow{OS}\|}{\sin(\widehat{OM_1S})}.$$

D'où : $\sin(\widehat{M_1OS}) = \dfrac{\|\overrightarrow{M_1S}\| \sin(\widehat{OM_1S})}{\|\overrightarrow{OS}\|}$; $\sin(\widehat{M_1OS}) = \dfrac{3\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\sqrt{34-30\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}}$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient en radian, $\widehat{M_1OS} \approx 0{,}465$.

$\varphi = \frac{\pi}{4} - \widehat{M_1OS}$ d'où $\varphi \approx 0{,}32$ (valeur arrondie à 10^{-2}).

Expression de s

Des résultats précédents on déduit que s pourra être assimilé au signal sinusoïdal défini sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto 6{,}46 \sin(2t + 0{,}32)$.

Méthode utilisant des nombres complexes

On associe :

– au signal s_1 le nombre complexe z_1 tel que $z_1 = [a_1, \varphi_1]$ ou encore $z_1 = a_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$

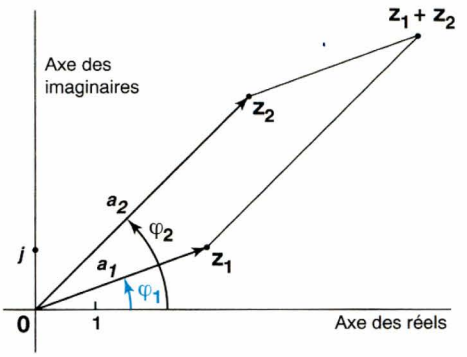
– au signal s_2 le nombre complexe z_2 tel que $z_2 = [a_2, \varphi_2]$ ou encore $z_2 = a_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$.

Le nombre complexe z somme de z_1 et de z_2 est alors associé à $s_1 + s_2$:

– son module est égal à l'amplitude de $s_1 + s_2$;

– son argument principal est égal à la phase à l'origine de $s_1 + s_2$.

On obtient dans le plan complexe le diagramme suivant.



Applications directes

Calculer l'amplitude a et la phase à l'origine φ de la somme s des signaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par $t \mapsto 5 \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ *et* $t \mapsto 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$.

Résolution

Les signaux ont même pulsation 2.

– Au signal s_1, on associe le nombre complexe $z_1 = 5\left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}\right)$

soit $z_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} + j\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

– Au signal s_2, on associe le nombre complexe $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

soit $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - j\frac{3}{2}$.

Donc $z = z_1 + z_2 = \frac{5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2} + j\frac{5\sqrt{2} - 3}{2}$.

Calculons le module de z :

$|z| = \frac{1}{2}\sqrt{30(-\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 136}$ d'où $|z| \approx 6{,}46$.

Calculons l'argument principal φ de z :

$\cos \varphi = \frac{\frac{5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2}}{|z|}$, $\sin \varphi = \frac{\frac{5\sqrt{2} - 3}{2}}{|z|}$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$

d'où $\tan \varphi = \frac{5\sqrt{2} - 3}{5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}$ et, puisque $\cos \varphi > 0$: $\varphi \approx 0{,}32$.

Le signal $s_1 + s_2$ peut donc être assimilé au signal sinusoïdal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 6{,}46 \sin(2t + 0{,}32)$.

3. Écriture d'un signal sinusoïdal en sinus et cosinus

a. Une nouvelle écriture

Soit le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 3 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

En appliquant la formule $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, le signal s peut s'écrire : $t \mapsto 3 \sin(2\pi t) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos(2\pi t) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Le signal s est donc la somme des deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

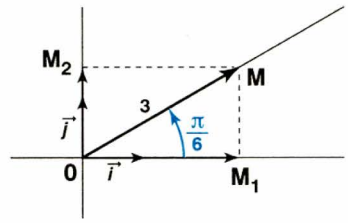
$t \mapsto \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \sin(2\pi t)$ et $t \mapsto \dfrac{3}{2} \cos(2\pi t)$.

L'amplitude de s_1 est $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et sa phase à l'origine est 0.

L'amplitude de s_2 est $\dfrac{3}{2}$ et, comme, $\dfrac{3}{2}\cos(2\pi t) = \dfrac{3}{2}\sin\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ sa phase à l'origine est $\dfrac{\pi}{2}$.

• *Interprétation*
Ce résultat s'interprète facilement en utilisant les représentations de Fresnel et les nombres complexes.

• *Représentation de Fresnel*
Le signal s est représenté par le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Le signal s_1 est représenté par $\overrightarrow{OM}_1$.
Le signal s_2 est représenté par $\overrightarrow{OM}_2$.
$\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



• *Représentation en nombres complexes*
Le signal s est représenté par le nombre complexe z tel que :
$z = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ soit $z = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}j$.

Le signal s_1 est représenté par le nombre $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \mathcal{R}\text{e}\, z\right)$.

Le signal s_2 est représenté par le nombre $\dfrac{3}{2}j$ $\left(j\dfrac{3}{2} = j\,\mathcal{I}\text{m}\, z\right)$.

Plus généralement, soit un signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto a\sin(\omega t + \varphi)$ où a, ω et φ sont des constantes réelles telles que $a > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.
En utilisant les formules d'addition (trigonométrie), on obtient, pour tout réel t, $s(t) = a\cos\varphi\sin(\omega t) + a\sin\varphi\cos(\omega t)$.

Faisons le point

Tout signal sinusoïdal s de pulsation ω peut s'écrire sous la forme $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où A et B sont des constantes réelles non simultanément nulles.
On admettra que cette écriture est unique ; on l'appelle écriture en sinus et cosinus du signal s.

Remarques

Le signal sinusoïdal s est ainsi écrit sous la forme de la somme d'un signal sinusoïdal pair $t \mapsto A\cos(\omega t)$ et d'un signal sinusoïdal impair $t \mapsto B\sin(\omega t)$.

b. Amplitude et phase à l'origine du signal sinusoïdal $t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

D'après l'étude précédente, tout signal sinusoïdal s de pulsation ω peut s'écrire de manière unique sous l'une des formes suivantes :

• $s(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ (forme 1)
$s(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (forme 2)

Pour passer de la forme 1 à la forme 2, on calcule A et B à l'aide des relations :

$$A = a \sin \varphi \quad \text{et} \quad B = a \cos \varphi.$$

Pour passer de la forme 2 à la forme 1, il faut calculer a et φ.

De $A = a \sin \varphi$ et $B = a \cos \varphi$, on déduit $A^2 + B^2 = a^2$

d'où, puisque $a > 0$, $a = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Les relations $\sin \varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\cos \varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ permettent φ de déterminer φ.

Faisons le point

Le signal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ où A et B sont deux constantes réelles non simultanément nulles et ω un réel strictement positif est le signal sinusoïdal de pulsation ω, d'amplitude a égale à $\sqrt{A^2 + B^2}$ et de phase à l'origine φ telle que $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $\sin \varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ et $\cos \varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Applications directes

Soit le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto -3 \cos(100 \pi t) + 2 \sin(100 \pi t)$. Indiquer quelle est sa pulsation ; calculer son amplitude et sa phase à l'origine.

Résolution

Dans ce cas $A = -3$ et $B = 2$.

- La pulsation ω est égale à 100π.
- L'amplitude a est égale à $\sqrt{(-3)^2 + (2)^2}$ soit $a = \sqrt{13}$.

La phase à l'origine φ est telle que :

$-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $\sin \varphi = \dfrac{A}{a}$ soit $\sin \varphi = \dfrac{-3}{\sqrt{13}}$

et $\cos \varphi = \dfrac{B}{a}$ soit $\cos \varphi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. On remarque dans le cas présent, que $\sin \varphi \leqslant 0$ et $\cos \varphi \geqslant 0$. De plus, $\tan \varphi = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \times \dfrac{\sqrt{13}}{2} = \dfrac{-3}{2}$.

- Calcul de φ.

1re méthode (avec le cosinus)

La calculatrice donne comme valeur arrondie à 10^{-2} de $\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ le nombre 0,98.

Dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ il y a deux valeurs possibles φ_1 et φ_2 pour φ, à savoir : $\varphi_1 = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ et $\varphi_2 = -\varphi_1$.

Le sinus de φ_1 étant positif ($\sin \varphi_1 \approx 0{,}83$) on retient φ_2 ($\varphi_2 \approx -0{,}98$).

2e méthode (avec la tangente)

La calculatrice donne comme valeur arrondie à 10^{-2} de $\tan^{-1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ le nombre $-0{,}98$.

Dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ il y a deux valeurs possibles φ_1' et φ_2' pour φ, à savoir : $\varphi_1' = \tan^{-1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et $\varphi_2' = \varphi_1 + \pi$. Le sinus de φ_1' étant négatif ($\sin \varphi_1' \approx -0{,}83$), on retient la valeur $\varphi_1' \approx -0{,}98$.

4. Somme de deux signaux sinusoïdaux de périodes fondamentales différentes

Étudions la somme de deux signaux sinusoïdaux de périodes fondamentales différentes et ayant une période commune T non nulle.
Soit les deux signaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par :
$t \mapsto 2 \sin (2t - 1)$ et $t \mapsto 3 \sin (5t + 2)$.

Périodicité de s_1, de s_2 et de $s_1 + s_2$
On constate que s_1 et s_2 admettent comme périodes fondamentales respectivement π et $\frac{2\pi}{5}$.

Ces périodes fondamentales sont différentes. Toutefois 2π constitue une période commune à ces deux signaux. En effet :

– les périodes du signal s_1 sont : $\ldots ; -2\pi ; -\pi ; 0 ; \pi ;$ $\boxed{2\pi}$ $; 3\pi ; 4\pi ; \ldots ;$

– les périodes du signal s_2 sont : $\ldots ; -\frac{4\pi}{5} ; -\frac{2\pi}{5} ; 0 ; \frac{2\pi}{5} ; \frac{4\pi}{5} ; \frac{6\pi}{5} ; \frac{8\pi}{5} ;$ $\boxed{\frac{10\pi}{5}}$ $; \ldots$

Le signal $s_1 + s_2$ est périodique de période 2π.

Nature du signal $s_1 + s_2$
Le signal $s_1 + s_2$ est-il un signal sinusoïdal ?
L'allure de la courbe représentative de $s_1 + s_2$ dans le plan rapporté à un repère peut donner une indication.

Sur la figure a, $\mathscr{C}_1$ représente s_1, $\mathscr{C}_2$ représente s_2 et $\mathscr{C}_3$ représente $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$.

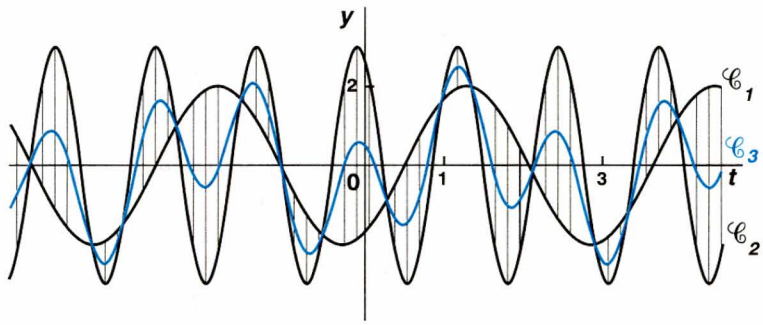


figure a

Sur la figure b, $\mathscr{C}_4$ représente s_4 ; elle a été obtenue à partir de $\mathscr{C}_3$.

On constate que le signal $s_1 + s_2$ n'est pas un signal sinusoïdal.

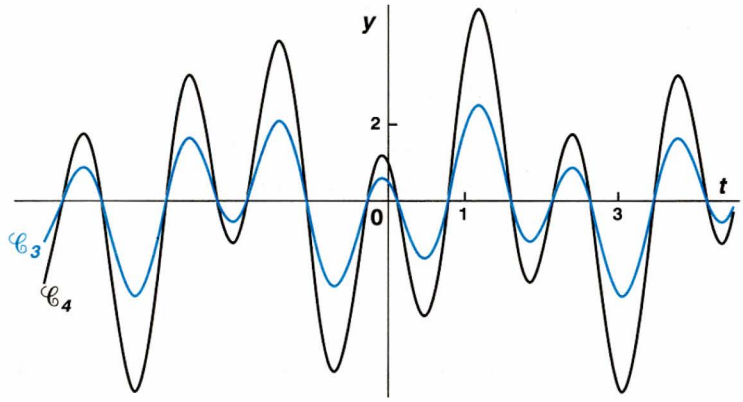


figure b

On admettra le résultat suivant.

Faisons le point

La somme de deux signaux sinusoïdaux n'ayant pas même période fondamentale mais une période commune T non nulle, est un signal périodique de période T qui n'est pas sinusoïdal.

BILAN

1. Signaux sinusoïdaux de même période : somme et produit par un nombre

Si λ et k sont des réels et si u et v sont deux signaux définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période T, alors λu, $v + k$ et $u + v$ sont des signaux définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période T.

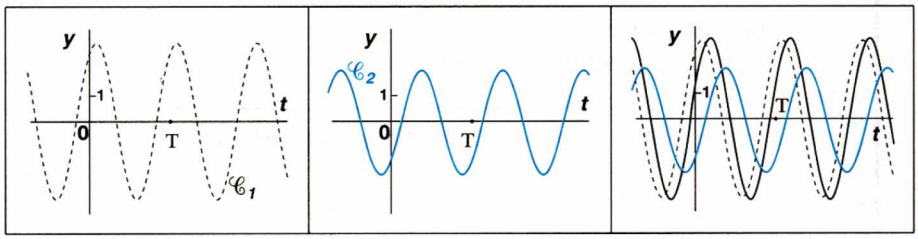
2. Somme de deux signaux sinusoïdaux de même période fondamentale *T*

- La somme, sauf si elle est nulle, de deux signaux sinusoïdaux de même période fondamentale T est un signal sinusoïdal de période fondamentale T.
- L'amplitude et la phase à l'origine de la somme peuvent être calculées à partir de l'amplitude et de la phase à l'origine de chacun des signaux qui la constituent en utilisant soit la méthode de Fresnel, soit la représentation en nombres complexes.

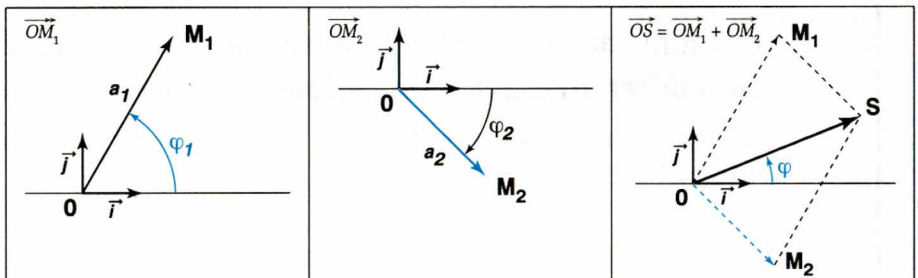
Signaux sinusoïdaux de pulsation ω ($\omega > 0$) de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$s_1 : t \mapsto a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$	$s_2 : t \mapsto a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$	$s = s_1 + s_2 : t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$
$a_1 > 0$; $-\pi < \varphi_1 \leqslant \pi$	$a_2 > 0$; $-\pi < \varphi_2 \leqslant \pi$	$a > 0$; $-\pi < \varphi \leqslant \pi$

Représentation graphique dans un repère orthogonal (Ot, Oy)



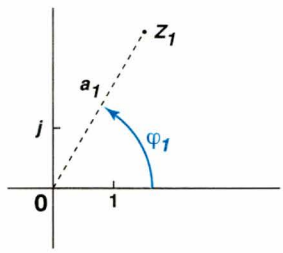
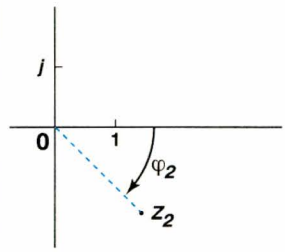
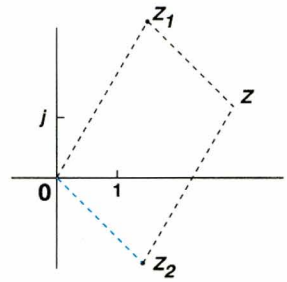
Représentation de Fresnel



$\lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert = a_1$ mes p^{ale} en rd de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_1}) = \varphi_1$	$\lVert\overrightarrow{OM_2}\rVert = a_2$ mes p^{ale} en rd de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_2}) = \varphi_2$	$a = \lVert\overrightarrow{OS}\rVert$; φ = mes p^{ale} en rd de $(\vec{i}, \overrightarrow{OS})$

BILAN

Représentation en nombres complexes

z_1	z_2	$z = z_1 + z_2$
		
$z_1 = [a_1 ; \varphi_1]$ $z_1 = a_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$	$z_2 = [a_2 ; \varphi_2]$ $z_2 = a_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$	$a = \lvert z \rvert$ $\varphi = \text{Arg } z$ (argument principal de z)

3. Écriture en sinus et cosinus d'un signal sinusoïdal

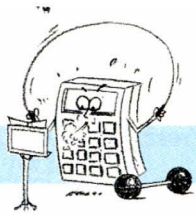
- Tout signal sinusoïdal s de pulsation ω peut s'écrire :
  $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$; $\omega > 0$; $-\pi < \varphi \leqslant \pi$
  ou $t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec $\omega > 0$, A et B réels non simultanément nuls.
  Les relations permettant le passage d'une écriture à l'autre sont :

$$A = a \sin \varphi \quad \text{et} \quad B = a \cos \varphi$$

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} \ ; \ \sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ .$$

4. Somme de deux signaux sinusoïdaux de périodes fondamentales différentes ayant un période *T* non nulle commune

- Le signal somme est périodique de période T mais n'est pas un signal sinusoïdal.



POUR S'ENTRAÎNER

EXERCICE 1

On considère les deux signaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 4 tels que :

$$\begin{cases} s_1(t) = 3 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ s_1(t) = -2 & \text{pour } 1 \leqslant t \leqslant 3 \\ s_1(t) = 1 & \text{pour } 3 < t < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_2(t) = 1 & \text{pour } 0 \leqslant t < 2 \\ s_2(t) = -\frac{1}{2} & \text{pour } 2 \leqslant t < 4. \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O*t*, O*y*), construire les représentations graphiques de s_1, s_2 et $s_1 + s_2$.

2. Calculer les valeurs moyennes de s_1 et de s_2 sur l'intervalle [0 ; 4].

3. Les propriétés de l'intégration permettent d'affirmer que :

$$\int_0^4 (s_1(t) + s_2(t))\,dt = \int_0^4 s_1(t)\,dt + \int_0^4 s_2(t)\,dt.$$

En déduire la valeur moyenne du signal $s_1 + s_2$ sur l'intervalle [0 ; 4].

4. On note $E_m(s_1)$, $E_m(s_2)$ et $E_m(s_1 + s_2)$ les énergies moyennes transportées par les signaux s_1, s_2 et s sur l'intervalle [0 ; 4].
Calculer $E_m(s_1)$, $E_m(s_2)$ et $E_m(s_1 + s_2)$.
A-t-on $E_m(s_1 + s_2) = E_m(s_1) + E_m(s_2)$?

5. Donner les valeurs efficaces des trois signaux s_1, s_2 et $s_1 + s_2$.

EXERCICE 2

On considère le signal s défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π tel que :

$$\begin{cases} s(t) = 1 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ s(t) = \sin t & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2} \\ s(t) = 0 & \text{pour } \frac{3\pi}{2} < t < 2\pi. \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O*t*, O*y*) construire la courbe représentative du signal s considéré sur l'intervalle $[-2\pi ; 4\pi]$.

2. Calculer la valeur moyenne $\overline{s}$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

3. Dans le plan rapporté au repère orthogonal (O*t*, O*y*) précédent, construire la courbe représentative du signal u défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto s(t) - \overline{s}$.

4. Indiquer quelle est la valeur moyenne de u sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

EXERCICE 3

On considère le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par :
$t \mapsto 2 \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1. Indiquer la période, l'amplitude et la phase à l'origine des signaux s et s' (s' désigne le signal dérivé de s).
On rappelle que pour tout réel α,
$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Donner la représentation de Fresnel et la représentation en nombres complexes de s et de s'.

EXERCICE 4

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points M_1 et M_2 ont respectivement comme coordonnées $(1 ; -1)$ et $(2 ; 2)$.

1. Placer les points M_1 et M_2 [diagramme 1].

2. Dans la représentation de Fresnel, les deux vecteurs $\overrightarrow{OM}_1$ et $\overrightarrow{OM}_2$ sont associés respectivement aux deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ de même période fondamentale T.

a. Calculer $\|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $\|\overrightarrow{OM_2}\|$ puis la mesure principale en radian, des angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}_1)$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}_2)$.

b. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O*t*, O*y*) construire les courbes représentatives des signaux s_1 et s_2 [diagramme 2].

3. On pose $s = s_1 + s_2$.

a. Construire sur le diagramme 1 la représentation $\overrightarrow{OS}$ de Fresnel de s.

b. Déterminer les signaux s_1 et s_2, puis construire la courbe représentative de s [diagramme 2].

c. Calculer l'amplitude et la phase à l'origine de s. Exprimer, pour tout t réel, $s(t)$.

EXERCICE 5

Soit les deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ par respectivement :
$t \mapsto 3 \sin(2t + 1)$ et $t \mapsto 5 \sin(2t - 3)$.

1. Vérifier que les signaux s_1 et s_2 ont la même période fondamentale. En déduire la période fondamentale de s.

2. Donner la représentation de Fresnel de s_1, s_2 et s.
Par une lecture graphique, proposer une valeur pour l'amplitude de s et une valeur pour la phase à l'origine de s.

3. Donner la représentation en nombres complexes de s_1, s_2 et s.

4. Montrer que l'amplitude de s est égale à $\sqrt{34+30\cos 4}$. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de cette amplitude.

5. Donner la valeur arrondie à 10^{-2} de la phase à l'origine du signal s.

EXERCICE 6

On considère les tensions sinusoïdales u_1 et u_2 ; écrire dans chacun des cas suivants la tension sinusoïdale $u_1 + u_2$ sous la forme $t \mapsto a \sin(\omega t + \varphi)$ avec $a > 0$, $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

1. $u_1(t) = 2\sqrt{2}\sin(100\pi t)$;
$u_2(t) = 10\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. $u_1(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$;
$u_2(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. $u_1(t) = 100\sin\left(200\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$;
$u_2(t) = 150\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 7

ω est un réel strictement positif.
On considère les deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 4\sin(\omega t)$ et $t \mapsto -6\cos(\omega t)$.

1. Donner la période fondamentale, l'amplitude et la phase à l'origine de s_1 et de s_2.

2. On pose $s = s_1 + s_2$.
Sachant que le signal s est sinusoïdal, préciser quelle est sa période.

3. Construire sur un même diagramme les représentations de Fresnel des signaux s_1, s_2 et s.

4. Indiquer quelles sont les représentations en nombres complexes des signaux s_1, s_2 et s.

5. Calculer en utilisant la représentation de Fresnel *et* la représentation en nombres complexes l'amplitude du signal s.
En conclure que, pour tout t réel, $-2\sqrt{13} \leqslant s(t) \leqslant 2\sqrt{13}$ puis que $-7{,}3 \leqslant s(t) \leqslant 7{,}3$.

EXERCICE 8

On considère le signal sinusoïdal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2\cos(3t) + 3\sin(3t)$.

1. Calculer $s(0)$ et $s'(0)$.

2. Montrer que, pour tout t réel, $s''(t) + 9s(t) = 0$.

3. Indiquer quelle est l'amplitude de s. En déduire la valeur efficace de s.

4. Déterminer la phase à l'origine de s.
(On rappelle que pour tout α réel, on a : $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.)

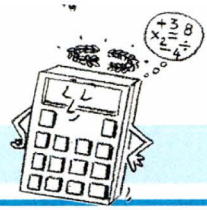
EXERCICE 9

On considère les deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ par : $t \mapsto 12\sin(100\pi t - 2)$ et $t \mapsto -4\sin(200\pi t + 1)$.

1. Indiquer, pour chacun des signaux s_1 et s_2 quelle est sa période fondamentale.

2. On pose $s = s_1 + s_2$.
Calculer $s\left(t + \frac{1}{50}\right)$, en déduire une période non nulle du signal s. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

3. On note $\overline{s_1}$, $\overline{s_2}$ et $\overline{s}$ les valeurs moyennes respectives de s_1, s_2 et s sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.
Montrer que : $\overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2}$.
En déduire que $\overline{s} = 0$.



LE JOUR DU BAC

Énoncé

Le signal de sortie s d'un système est défini sur [0 ; 5] par :

$t \mapsto e^{-t}\left(10\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(2t+\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

On note s_1 le signal défini sur $\mathbb{R}$ par

$t \mapsto 10\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(2t+\frac{5\pi}{6}\right)$.

Encadrement du signal s_1

1. Dire pourquoi le signal s_1 est sinusoïdal et donner sa période.

2. Montrer que l'amplitude du signal sinusoïdal s_1 est égale à $5\sqrt{3}$. En déduire que pour tout t réel $-5\sqrt{3} \leqslant s_1(t) \leqslant 5\sqrt{3}$.

3. Montrer que pour tout t réel, $-8{,}7 \leqslant s_1(t) \leqslant 8{,}7$.

4. On rappelle que pour tout t réel, e^{-t} est un nombre positif. En déduire que pour tout t de l'intervalle [0 ; 10], $-8{,}7\,e^{-t} \leqslant s(t) \leqslant 8{,}7\,e^{-t}$.

Étude du signal u défini sur [0 ; 5] par $t \mapsto 8{,}7\,e^{-t}$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

t	0	1	2	3	4	5
Valeur de $u(t)$ arrondie à 10^{-2}						

2. Déterminer le signal dérivé u' du signal u.

3. Indiquer, pour tout t de l'intervalle [0, 5] le signe de $u'(t)$.
En déduire le sens de variation de u.

Graphiques

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Ot, Oy) :

1. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_u$ représentative du signal u.

2. Construire la courbe $\mathscr{C}_v$ représentative du signal défini sur [0 ; 5] par $t \mapsto -8{,}7\,e^{-t}$.

3. Hachurer, en utilisant les tracés des courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$, la zone dans laquelle se situe la courbe représentative de s.

4. Par une lettre graphique, proposer un encadrement de s (2, 5).

On rappelle les résultats suivants :

t	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Solution

Encadrement du signal s_1

1. Le signal s_1 est la somme des deux signaux sinusoïdaux $t \mapsto 10\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ et $t \mapsto 5\sin\left(2t+\frac{5\pi}{6}\right)$ qui sont tous deux des signaux sinusoïdaux de pulsation 2.

Le signal s_1 est donc un signal sinusoïdal de pulsation 2, soit de période $\frac{2\pi}{2}$ ou encore π.

2. Il existe plusieurs méthodes pour calculer le carré de l'amplitude du signal s_1.

a. Méthode de Fresnel.

Le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ est associé à $t \mapsto 10\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ est associé à $t \mapsto 5\sin\left(2t+\frac{5\pi}{6}\right)$.

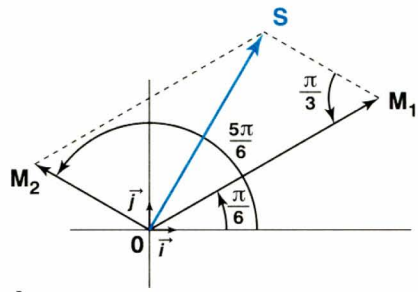
Le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est la somme $\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$ et est associée à s_1. L'amplitude s_1 est égale à $\|\overrightarrow{OS}\|$.

Dans le triangle OM_1S :

$\overrightarrow{OS}^2 = \overrightarrow{OM}_1^2 + \overrightarrow{SM}^2 - 2\,\|\overrightarrow{OM_1}\|\|\overrightarrow{SM}\|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{OS}^2 = 100 + 25 - 2 \times 5 \times 10 \times \frac{1}{2}$

$\|\overrightarrow{OS}\|^2 = 75$ et $\|\overrightarrow{OS}\| = \sqrt{75}$ ou $\|\overrightarrow{OS}\| = 5\sqrt{3}$



b. Méthode de calcul utilisant les nombres complexes :

$z_1 = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\,10\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est associé à $t \mapsto 10\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + j\,5\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est associé à $t \mapsto 5\sin\left(2t + \frac{5\pi}{6}\right)$

Le nombre $z_1 + z_2 = \left(5\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) + j\left(5 + \frac{5}{2}\right)$ est associé à s_1 de sorte que l'amplitude de s_1 est égale à $|z_1 + z_2|$ soit $\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2}$ ce qui donne $|z_1 + z_2| = \sqrt{75}$ ou encore $|z_1 + z_2| = 5\sqrt{3}$.

D'après la définition de l'amplitude d'un signal sinusoïdal, il vient :
pour tout t réel, $-5\sqrt{3} \leqslant s_1(t) \leqslant 5\sqrt{3}$.

3. On constate que $5\sqrt{3} \leqslant 8{,}7$ d'où le résultat :
pour tout t réel, $-8{,}7 \leqslant s_1(t) \leqslant 8{,}7$.

4. On multiplie chaque terme de la suite d'inégalités précédentes par e^{-t} qui est un nombre positif. On obtient :
pour tout t de $[0 ; 5]$, $-8{,}7\,e^{-t} \leqslant s_1(t)\,e^{-t} \leqslant 8{,}7\,e^{-t}$
soit $-8{,}7\,e^{-t} \leqslant s(t) \leqslant 8{,}7\,e^{-t}$.

Étude du signal *u*

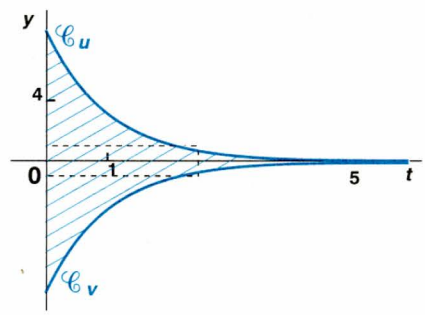
1.

t	0	1	2	3	4	5
Valeur arrondie de $u(t)$ à 10^{-2}	8,70	3,20	1,18	0,43	0,16	0,06

2. u' est défini sur $[0 ; 5]$ par $t \mapsto -8{,}7\,e^{-t}$.
3. Pour tout t de $[0 ; 5]$, $u'(t) \leqslant 0$.
Le signal u est donc décroissant.

Graphique

1. Voir graphique.
2. $\mathscr{C}_v$ est symétrique de $\mathscr{C}_u$ par rapport à l'axe (Ot).
3. Pour tout t de $[0 ; 5]$: $v(t) \leqslant s(t) \leqslant u(t)$ d'où la partie hachurée sur le graphique.
4. On peut proposer $-1 \leqslant s(2{,}5) \leqslant 1$.



POUR APPROFONDIR

PROBLÈME 1 ●● ✔

1. En utilisant le formulaire, montrer que, pour tous α et β réels :

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} = \sin\alpha \sin\beta.$$

2. On considère les deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$t \mapsto 10 \sin(100\pi t)$ et $t \mapsto 5 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

On note p le signal $s_1\, s_2$, c'est-à-dire le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto s_1(t)\, s_2(t)$.

2. a. Montrer que, pour tout t réel :

$$p(t) = 25\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

En déduire que, pour tout t réel :

$$p(t) = 25\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 25\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Indiquer quelle est la période fondamentale de p ; calculer la valeur moyenne de p sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{100}\right]$.

c. On note s le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 25 \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Calculer $p(0)$ et $s(0)$ puis construire dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) les courbes représentatives de s et de p.

3. On considère les deux signaux sinusoïdaux u_1 et u_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$t \mapsto a_1 \sin(\omega t)$ et $t \mapsto a_2 \sin(\omega t + \varphi)$

où a_1, a_2, ω et φ sont des réels tels que :

$a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $\omega > 0$ et $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

On note P le signal $u_1\, u_2$, c'est-à-dire le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto u_1(t)\, u_2(t)$.

a. Montrer que pour tout réel t :

$$P(t) = \frac{a_1 a_2}{2}[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)].$$

b. Indiquer quelle est la période fondamentale de P.

c. Calculer la valeur moyenne de P sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{\omega}\right]$.

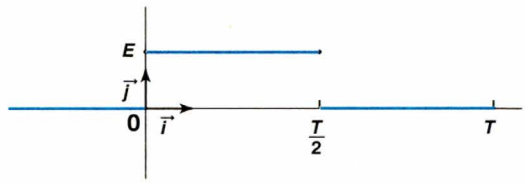
PROBLÈME 2 BAC PRO ✔

T et E sont deux nombres strictement positifs donnés.

On considère le signal u_1 défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T tel que :

$$\begin{cases} u_1(t) = E & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{T}{2} \\ u_1(t) = 0 & \text{pour} \quad \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

La représentation graphique du signal u_1 dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est notée $\mathscr{C}_1$.



1. Dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ construire :

– $\mathscr{C}_2$ image de $\mathscr{C}_1$ par la translation de vecteur $\frac{T}{3}\vec{i}$;

– $\mathscr{C}_3$ image de $\mathscr{C}_2$ par la translation de vecteur $\frac{T}{3}\vec{i}$.

Indiquer quelle est l'image de $\mathscr{C}_3$ par la translation du vecteur $\frac{T}{3}\vec{i}$.

2. On note u_2 et u_3 les signaux dont les représentations graphiques dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sont respectivement $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Indiquer si les signaux u_2 et u_3 sont périodiques et si oui, préciser leurs périodes fondamentales.

3. On considère les trois signaux s_1, s_2 et s_3 définis par :

$s_1 = u_2 - u_3$; $s_2 = u_3 - u_1$ et $s_3 = u_2 - u_1$.

a. Construire dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques de s_1, s_2 et s_3.

b. Montrer que la valeur efficace de s_1 est égale à $E\sqrt{\frac{2}{3}}$. Cette valeur efficace est notée $V_{\text{eff}}(s_1)$.

c. Calculer la valeur efficace de s_2 et de s_3.

4. Sur un même diagramme, faire apparaître la représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ de s_1 et du signal w défini sur $\mathbb{R}$ par

$t \mapsto E \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Calculer la valeur efficace de w notée $V_{\text{eff}}(w)$.

Calculer le rapport $\frac{V_{\text{eff}}(s_1)}{V_{\text{eff}}(w)}$.

PROBLÈME 3 ●● ✔

ω est un réel strictement positif.

On considère le système triphasé (v_1, v_2, v_3) de tensions tel que :

$$v_1(t) = 10 \sin(\omega t)$$
$$v_2(t) = 10 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$v_3(t) = 10 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

1. Donner pour chacun des signaux v_1, v_2 et v_3 son amplitude, sa période fondamentale, sa phase à l'origine.

2. Sur un même diagramme, faire apparaître les représentations de Fresnel de v_1, v_2 et v_3.

3. Donner les représentations en nombres complexes de v_1, v_2 et v_3.

4. On pose : $u_{12} = v_1 - v_2$; $u_{23} = v_2 - v_3$ et $u_{31} = v_3 - v_1$.
Sur le diagramme de la question **2.** faire apparaître les représentations de Fresnel de u_{12}, u_{23} et u_{31} (u_{12}, u_{23} et u_{31} sont les tensions entre phases).

5. En utilisant le diagramme de Fresnel ou la représentation en nombres complexes, déterminer les amplitudes des signaux sinusoïdaux u_{12}, u_{23} et u_{31}.

6. Écrire en fonction de t, $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$ et $u_{31}(t)$.

PROBLÈME 4 ●●

On considère les tensions sinusoïdales u_1 et u_2 telles que :

$$u_1 : t \mapsto 10 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$\text{et } u_2 : t \mapsto 12 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Pour chacune de ces tensions indiquer : sa période fondamentale, son amplitude, sa phase à l'origine, sa valeur efficace.

2. On pose $u = u_1 + u_2$, donner :
a. Les représentations graphiques de u_1, u_2 et u dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
b. Les représentations de Fresnel puis les représentations en nombres complexes de u_1, u_2 et u.

3. Calculer en utilisant la représentation de Fresnel et la représentation en nombres complexes l'amplitude et la phase à l'origine de u.

4. Calculer l'énergie moyenne transportée par le signal u sur l'intervalle [0 ; 2].
Comparer cette valeur à la somme des énergies moyennes transportées sur [0 ; 2] par les signaux u_1 et u_2.

PROBLÈME 5 BAC PRO

1. Soit la fonction f de la variable t, définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(t) = 4(t^2 - t)$.

a. Compléter le tableau suivant :

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(t)$					

b. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

c. Établir le tableau de variation de f.

d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ construire la courbe représentative de f.

2. On considère le signal u de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ périodique de période 2 tel que :

$$\begin{cases} u(t) = 4(t^2 - t) & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u(t) = 0 & \text{pour } 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

a. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ construire la courbe représentative de u.

b. Calculer la valeur moyenne de u sur l'intervalle [0 ; 2].

c. Calculer l'énergie moyenne transportée par u sur l'intervalle [0 ; 2].

3. On considère le signal v de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ périodique de période 2 tel que :

$$\begin{cases} v(t) = 0 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ v(t) = 4(t^2 - t) & \text{pour } 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

a. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ construire la courbe représentative de v.

b. Calculer la valeur moyenne de v sur l'intervalle [0 ; 2].

c. Calculer l'énergie moyenne transportée par v sur l'intervalle [0 ; 2].

4. On considère le signal h de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = u(t) + v(t)$.

a. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ construire la courbe représentative de h.

b. Calculer la valeur moyenne de h sur l'intervalle [0 ; 2].

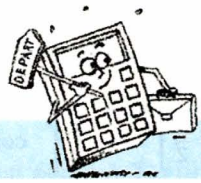
c. Calculer l'énergie moyenne transportée par h sur l'intervalle [0 ; 2].

7

APPROXIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

Objectifs

- **Savoir calculer, dans les cas simples, les premiers coefficients de Fourier d'un signal périodique.**
- **Savoir écrire les « premiers » signaux polynômes de Fourier associés à un signal périodique.**
- **Savoir donner la valeur moyenne, l'énergie moyenne et le spectre d'amplitude des « premiers » signaux polynômes de Fourier associés à un signal périodique.**



Pour prendre un bon départ

1. Relations trigonométriques

Montrer que pour tous a et b réels :

$\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} = \sin a \sin b.$

En déduire que :

$\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$; $\sin^2(2t) = \dfrac{1-\cos(4t)}{2}$; $\sin(2t)\sin t = \dfrac{\cos t - \cos 3t}{2}$.

2. Énergie moyenne d'un signal

On considère le signal s défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 5\sin t - 3\sin(2t)$.

a. Montrer que, pour tout t réel,

$(s(t))^2 = 17 - 15\cos t - \dfrac{25}{2}\cos(2t) + 15\cos(3t) - \dfrac{9}{2}\cos(4t)$.

b. Vérifier que s est périodique de période 2π puis donner l'énergie moyenne E_m transportée par s sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ ainsi que sa valeur efficace V_{eff}.

c. En utilisant les relations du paragraphe précédent, transformer les écritures de $s(t)\sin t$ et de $s(t)\sin(2t)$, puis calculer les intégrales I et J suivantes :

$I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} s(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} s(t)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$.

Donner les valeurs des nombres b_1 et b_2 tels que $b_1 = \dfrac{1}{\pi} I$ et $b_2 = \dfrac{1}{\pi} J$.

Vérifier que $t \mapsto b_1 \sin t + b_2 \sin(2t)$ n'est autre que le signal s.

Eléments de réponse

1. Dans le formulaire, on lit : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
En remplaçant b par $-b$ et en tenant compte de la parité de la fonction cosinus et de l'imparité de la fonction sinus, on obtient :
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
d'où le résultat demandé.
Pour obtenir les résultats demandés, on prend respectivement : $a = b = t$; $a = b = 2t$; $a = 2t$ et $b = t$.

2. a. $(s(t))^2 = 25\,\frac{1-\cos(2t)}{2} + 9\,\frac{1-\cos(4t)}{2} - 30\,\frac{\cos t - \cos(3t)}{2}$

$(s(t))^2 = 17 - 15\cos t - \frac{25}{2}\cos(2t) + 15\cos(3t) - \frac{9}{2}\cos(4t)$

b. $E_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (s(t))^2\,dt$; on obtient alors une somme d'intégrales dans laquelle toutes les intégrales du type $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\,dt$ avec $k = 1\,;\,2\,;\,3\,;\,4$ sont nulles.

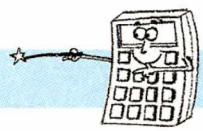
Donc $E_m = 17$ et $V_{eff} = \sqrt{17}$.

c. $s(t)\sin t = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos t - \frac{5}{2}\cos(2t) + \frac{3}{2}\cos(3t)$

$I = \frac{5}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt - \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,dt - \frac{5}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2t)\,dt + \frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3t)\,dt$

$I = \frac{5}{2} \times 2\pi + 0 + 0 + 0 = 5\pi \qquad J = -3\pi.$

Posons le problème



La première partie porte sur les signaux polynômes trigonométriques : définition et écriture en sinus et cosinus, calcul de la valeur moyenne, de l'énergie moyenne et de la valeur efficace. On constatera que pour tous ces calculs, l'écriture en sinus et cosinus est privilégiée ; il en est de même pour la formule de Parseval.
La seconde partie donne la définition des coefficients de Fourier d'un signal périodique puis se termine par l'étude de l'approximation d'un signal périodique à l'aide des signaux polynômes de Fourier qui lui sont associés.

Activités et résultats

1. Signaux polynômes trigonométriques

a. Définition. Propriétés

Soit le signal s défini sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto 9 + 2\cos\left(-50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin(150\pi t)$.

Ce signal est la somme, à la constante additive 9 près, de 3 signaux sinusoïdaux. Ces signaux sont ici ordonnés en fonction de leur pulsation.

Ainsi :
le signal $s_1 : t \mapsto 2\cos\left(-50\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ a pour pulsation 50π ;

le signal $s_2 : t \mapsto -\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ a pour pulsation 100π ;

et le signal $s_3 : t \mapsto -\frac{1}{2}\sin(150\pi t)$ a pour pulsation 150π.

Les périodes fondamentales de ces signaux sont $\frac{1}{25}$ pour s_1 ; $\frac{1}{50}$ pour s_2 et $\frac{1}{75}$ pour s_3.

Ces périodes fondamentales sont différentes, toutefois $\frac{1}{25}$ est une période commune aux trois signaux considérés.

En effet :
les périodes de s_1 sont : $\ldots ; -\frac{1}{25} ; 0 ; \boxed{\frac{1}{25}} ; \frac{2}{25} ; \frac{3}{25} ; \ldots$

les périodes de s_2 sont : $\ldots ; -\frac{1}{50} ; 0 ; \frac{1}{50} ; \boxed{\frac{2}{50}} ; \frac{3}{50} ; \ldots$

celles de s_3 sont : $\ldots ; -\frac{1}{75} ; 0 ; \frac{1}{75} ; \frac{2}{75} ; \boxed{\frac{3}{75}} ; \frac{4}{75} ; \ldots$

Le signal s est un signal périodique de période $\frac{1}{25}$ qui est la somme, à une constante additive près, de trois signaux sinusoïdaux admettant $\frac{1}{25}$ comme période commune.

On pose $T = \frac{1}{25}$. La période fondamentale de s_1 est égale à T, celle de s_2 à $\frac{T}{2}$ et celle de s_3 à $\frac{T}{3}$. Le signal s est donc un signal périodique de période T qui est la somme, à une constante additive près, de trois signaux sinusoïdaux s_1, s_2 et s_3 de périodes fondamentales respectives T, $\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{3}$.

Plus généralement nous admettrons les résultats suivants.

Faisons le point

- Tout signal défini sur $\mathbb{R}$, qui, à une constante additive près, est la somme de signaux sinusoïdaux ayant une période commune, est appelé signal polynôme trigonométrique.
- Tout signal polynôme trigonométrique est un signal périodique.

b. Écriture en sinus et cosinus

Chacun des signaux s_1, s_2 considérés précédemment peut s'écrire en sinus et cosinus. Vérifier que l'on obtient en utilisant les formules de trigonométrie rappelées en fin d'ouvrage :

$s_1 : t \mapsto \sqrt{2}\cos(50\pi t) + \sqrt{2}\sin(50\pi t)$; $s_2 : t \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(100\pi t) - \frac{1}{2}\sin(100\pi t)$

Le signal polynôme trigonométrique s défini sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto 9 + 2\cos\left(-50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin(150\pi t)$ s'écrit alors

$t \mapsto 9 + \sqrt{2}\cos(50\pi t) + \sqrt{2}\sin(50\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(100\pi t) - \frac{1}{2}\sin(100\pi t) - \frac{1}{2}\sin(150\pi t)$.

En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = \frac{1}{25}$ on obtient :

$s : t \mapsto 9 + \sqrt{2}\cos(\omega t) + \sqrt{2}\sin(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) - \frac{1}{2}\sin(3\omega t)$.

Plus généralement, nous retiendrons le résultat suivant.

Faisons le point

T étant un réel strictement positif, ω étant égal à $\frac{2\pi}{T}$, tout signal polynôme trigonométrique s non constant de période T s'écrit sous la forme :
$t \mapsto a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \ldots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$ où a_0, a_1, b_1, …, a_n et b_n sont des réels avec a_n et b_n **non simultanément nuls**.
Cette écriture s'appelle l'écriture en sinus et cosinus du signal s.

Remarques

- Pour une période $T > 0$ choisie, l'écriture en sinus et cosinus de s est unique.
- Dans l'écriture en sinus et cosinus de s, les signaux définis par $t \mapsto a_0$ ou $t \mapsto a_k\cos(k\omega t)$ sont pairs, les signaux définis par $t \mapsto b_k\sin(k\omega t)$ sont impairs (k entier de 1 à n).
- Lorsqu'un signal polynôme trigonométrique est donné, à une constante additive près, comme somme de signaux sinusoïdaux alors cette constante n'est autre que a_0.

Application directe

Soit le signal polynôme trigonométrique s défini sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto 9 + 2\cos\left(-50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin(150\pi t)$.

a. *Pour ce signal polynôme trigonométrique s, donner les valeurs des coefficients a_0, a_1, b_1, … etc.*

b. *Montrer que s peut s'écrire comme somme d'un signal polynôme trigonométrique S_p pair et d'un signal trigonométrique S_I impair.*

Résolution

a. $T = \frac{1}{25}$ donc $\omega = 50\pi$; en utilisant l'écriture

$t \mapsto 9\sqrt{2}\cos(50\pi t) + \sqrt{2}\sin(50\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(100\pi t) - \frac{1}{2}\sin(100\pi t) - \frac{1}{2}\sin(150\pi t)$ du signal s obtenu précédemment on a :

$a_0 = 9$; $a_1 = \sqrt{2}$; $b_1 = \sqrt{2}$; $a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $b_2 = -\frac{1}{2}$; $a_3 = 0$; $b_3 = -\frac{1}{2}$.

b. $S_p : t \mapsto 9 + \sqrt{2}\cos(50\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(100\pi t)$

$S_I : t \mapsto \sqrt{2}\sin(50\pi t) - \frac{1}{2}\sin(100\pi t) - \frac{1}{2}(150\pi t)$.

c. Valeur moyenne

Soit un signal polynôme trigonométrique s de période T ($T > 0$).

La valeur moyenne $\bar{s}$ de s sur $[0 ; T]$ est égale à $\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$. Calculons $\bar{s}$.

Utilisons l'écriture en sinus et cosinus de s et la linéarité de l'intégration :

$$\frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T a_0\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T a_1\cos(\omega t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T b_1\sin(\omega t)\,dt + \ldots +$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T a_n\cos(n\omega t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T b_n\sin(n\omega t)\,dt \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

T étant une période pour chacun des signaux sinusoïdaux considérés il vient :

$$\bar{s} = \frac{1}{T}\int_0^T a_0\,dt + 0 + 0 + \ldots + 0 \quad \text{d'où} \quad \bar{s} = \frac{a_0 T}{T} = a_0.$$

Faisons le point

La valeur moyenne $\bar{s}$ du signal polynôme trigonométrique s de période T ($T > 0$) est égale à la constante additive a_0 qui apparaît dans l'écriture sinus et cosinus de qs.

Application directe

Indiquer, par simple lecture , quelle est la valeur moyenne $\bar{s}$ sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{25}\right]$ du signal polynôme trigonométrique défini sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto 9 + 2\cos\left(-50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin(150\pi t)$.

Réponse

s est périodique de période $\frac{1}{25}$. $\bar{s} = 9$.

d. Valeur de l'énergie moyenne transportée

On rappelle que l'énergie moyenne E_m transporté par un signal de période T sur l'intervalle [0 ; T], $T > 0$ est égale à $\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt$.

Nous admettrons le résultat suivant.

Faisons le point

En posant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si l'écriture du signal polynôme trigonométrique s en sinus et cosinus est : $t \mapsto a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + \ldots + a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$ alors l'énergie moyenne E_m transportée par s sur l'intervalle [0 ; T] est :

$$\boxed{E_m = a_0^2 + \frac{a_1^2}{2} + \frac{b_1^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}}$$ (*relations de Parseval*)

Applications directes

Calculer l'énergie moyenne transportée sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{25}\right]$ par le signal polynôme trigonométrique défini sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto 9 + 2\cos\left(-50\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ sin (150 πt) En déduire V_{eff}.

Résolution

$E_m = 9^2 + \frac{1}{2}\left((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{669}{8}$. $V_{eff} = \sqrt{\frac{669}{8}}$.

E_1 à E_6

2. Approximation des signaux périodiques de période T

a. Coefficients de Fourier d'un signal polynôme trigonométrique de période T

Nous avons vu que l'écriture en sinus et cosinus du signal polynôme trigonométrique s de période $T > 0$ et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est $t \mapsto a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ où a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, …, a_n et b_n sont des nombres réels avec a_n et b_n non simultanément nuls.
Les nombres a_k et b_k utilisés s'appellent les **coefficients de Fourier** du signal s.
Ils sont uniques et on admet qu'ils satisfont les égalités suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,\mathrm{d}t \; ; \; a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \; ; \; b_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \; ;$$

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t \; ; \ldots \text{ etc.}$$

Soit pour tout k entier naturel de 1 et n : $a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t$;

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Coefficients de Fourier d'un signal s périodique de période T ($T > 0$)

Faisons le point

- Définition :
On appelle coefficients de Fourier du signal s de période T (avec $T > 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$) les nombres réels a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, …, a_n, b_n, … tels que :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,\mathrm{d}t \; ; \; a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t \; ; \; b_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t \; ;$$

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t \; ; \qquad b_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t \; ; \ldots \text{ etc.}$$

Soit pour tout k entier naturel non nul : $a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,s(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t$;

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques

- Le nombre a_0 est la valeur moyenne du signal s sur tout intervalle de longueur T.
- Si s est un signal polynôme trigonométrique de période T alors tous les coefficients a_k et b_k sont tous nuls à partir d'un certain rang.
- Les calculs des coefficients sont ici effectués sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$. Ils peuvent être effectués sur tout intervalle de longueur T (exemple : $[0 ; T]$).

- Pour le calcul des coefficients, on pourra utiliser les résultats suivants que l'on admettra :

– Si f est une fonction paire sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$, alors $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt$.

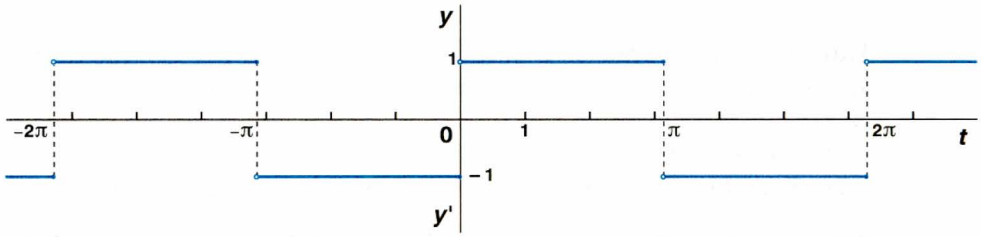
– Si f est une fonction impaire sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$ alors $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\ dt = 0$.

- Si le signal s est pair, tous les signaux $t \mapsto s(t) \sin(k\omega t)$ sont impairs et tous les coefficients b_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sont nuls.
- Si le signal s est impair, tous les signaux $t \mapsto s(t) \cos(k\omega t)$ sont impairs et tous les coefficients a_k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ sont nuls.

Applications directes

Soit le signal s défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π tel que :
pour $-\pi < t < 0$, $s(t) = -1$; pour $0 < t < \pi$, $s(t) = 1$ et $s(-\pi) = s(0) = s(\pi) = 0$.
Donner dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Ot ; Oy) l'allure de la courbe représentative de s.
En utilisant les notations du cours, calculer pour ce signal ses coefficients de Fourier a_0 ; a_1 ; b_1 ; a_2 ; b_2 et a_3 ; b_3.

Résolution



On constate que le signal s est impair donc a_0 ; a_2 et a_3 sont nuls.

Ici $\omega = 1$, donc $b_1 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(t)\ \sin t\ dt$ $\quad b_2 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(t)\ \sin(2\,t)\ dt$

et $\quad b_3 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(t) \sin(3\,t)\,dt$.

Le signal s étant impair, les signaux $t \mapsto s(t) \sin t$ et $t \mapsto s(t) \sin(2\,t)$ sont pairs, d'où d'après les propriétés de l'intégrale :

$b_1 = 2 \times \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} s(t) \sin(t)\,dt$ $\quad b_2 = 2 \times \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} s(t) \sin(2\,t)\,dt$

et $b_3 = 2 \times \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\pi} s(t) \sin(3\,t)\,dt$.

Soit, en tenant compte du fait que pour tout t de l'intervalle $]0 ; \pi[$, $s(t) = 1$:

$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\ (t)\,dt$; $\quad b_2 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\ (2\,t)\,dt$ et $b_3 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\ (3\,t)\,dt$.

Donc $b_1 = \frac{4}{\pi}$; $\quad b_2 = 0$ $\quad$ et $\quad b_3 = \frac{4}{3\pi}$.

c. Signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre *n* associé à un signal périodique de période *T* (*T* > 0)

Faisons le point

Définition

Le signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre n ($n > 0$) associé à un signal périodique s de période T est le signal défini sur $\mathbb{R}$ par :
$t \mapsto a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots + a_3 \cos(3\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ où a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, …, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de s.

Applications directes

Donner les signaux polynômes trigonométriques de Fourier F_1 ; F_2 et F_3 d'ordre 1 ; 2 et 3 du signal traité à l'application directe précédente.

Les signaux F_1 ; F_2 et F_3 sont les signaux périodiques de période 2π définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par :

$F_1 : t \mapsto \dfrac{4\sin t}{\pi}$ $\quad F_2 = F_1$ $\quad F_3 : \mapsto F_2 + \dfrac{4\sin(3t)}{3\pi}$ soit $t \mapsto \dfrac{4}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{\sin(3t)}{3}\right)$.

Remarque

Le signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre n ($n > 0$) associé au signal s périodique de période T est un signal polynôme trigonométrique de période T.

d. Harmoniques et spectre d'amplitude d'un signal périodique de période *T*

Les signaux sinusoïdaux qui servent effectivement à écrire les différents signaux polynômes de Fourier associés à un signal s périodique de période T peuvent être ordonnés en fonction de leur fréquence.

– Le signal $t \mapsto a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$ est soit le signal nul (a_1 et b_1 nuls) soit un signal sinusoïdal qui a pour période fondamentale T $\left(\text{soit encore } \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$ et pour fréquence $\dfrac{1}{T}$ notée f.

Ce signal est le **fondamental** ou **l'harmonique de rang 1** (premier harmonique) du signal s.

Le fondamental peut encore être présenté sous la forme : $t \mapsto \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ \sin(\omega t + \varphi_1)$ avec $-\pi < \varphi_1 \leqslant \pi$. Son amplitude est égale à $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ (lorsque $a_1 = b_1 = 0$, on prend $\varphi_1 = \pi$).

– Le signal $t \mapsto a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$ est soit le signal nul (a_2 et b_2 nuls) soit un signal sinusoïdal qui a pour période fondamentale $\dfrac{T}{2}$ et pour fréquence $2f$.

Ce signal est **l'harmonique de rang 2** du signal s.

L'harmonique de rang 2 peut encore s'écrire $t \mapsto \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\ \sin(2\omega t + \varphi_2)$ avec $-\pi < \varphi_2 \leqslant \pi$.

Son amplitude est égale à $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ (lorsque $a_2 = b_2 = 0$ on prend $\varphi_2 = 0$).

Plus généralement : k étant un entier naturel non nul, le signal $t \mapsto a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$ est soit le signal nul (a_k et b_k nuls) soit un signal sinusoïdal qui a pour période fondamentale $\dfrac{T}{k}$ et pour fréquence kf.

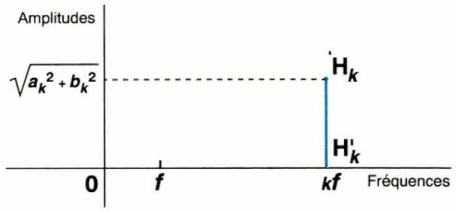
Ce signal est **l'harmonique de rang *k*** du signal s.

L'harmonique de rang n peut encore s'écrire $t \mapsto \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\ \sin(k\omega t + \varphi_n)$ avec $-\pi < \varphi_k \leqslant \pi$.

Son amplitude est égale à $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ (lorsque $a_k = b_k = 0$, on prend $\varphi_k = \pi$).

• *Spectre d'amplitude*

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, pour chaque valeur de k entière non nulle, on place le point H_k ayant pour abscisse kf et pour ordonnée $\left(\sqrt{a_k^2+b_k^2}\right)$. Le projeté orthogonal de H_k sur l'axe des abscisses est noté H_k'. Le segment $[H_k\ H_k']$ est appelée la raie d'amplitude de l'harmonique de rang k du signal s. L'ensemble des raies d'amplitude des harmoniques du signal s auquel on adjoint la raie [OA] où A est le point de coordonnée $(0\ ;|a_0|)$, est appelé le **spectre d'amplitude** de s.



Exemple

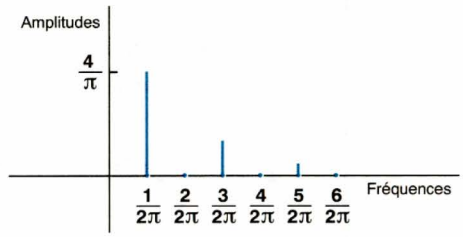
Pour le signal étudié dans l'application directe précédente (page 95), on a obtenu pour signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre 3 le signal F_3 défini par $t \mapsto \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin(3\,t)$. La valeur moyenne a_0 est nulle.

Le fondamental est $F_1 : t \mapsto \frac{4}{\pi}\sin t$.

L'harmonique de rang 2 est nul.

L'harmonique de rang 3 est le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{4}{3\pi}\sin(3\,t)$.

Sachant par ailleurs que l'harmonique de rang 4 est nul et que l'harmonique de rang 5 est $t \mapsto \frac{4}{5\pi}\sin(5\,t)$, on obtient la partie du spectre d'amplitude ci-contre.



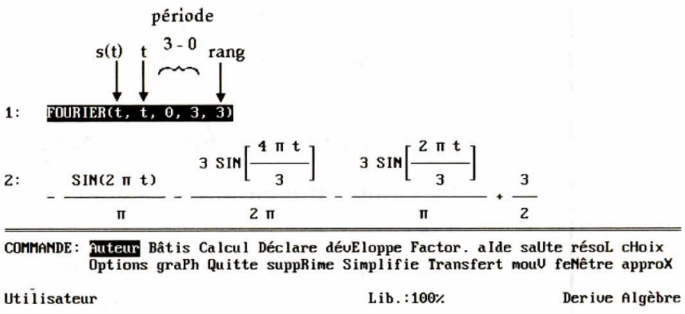
e. Approximation d'un signal périodique

Pour effectuer certains travaux concernant un signal périodique, il est quelquefois demandé de le remplacer par l'un de ses signaux polynomes trigonométriques de Fourier. La détermination des coefficients de Fourier d'un signal demande des calculs d'intégrales. Si on a besoin de ces coefficients, il est possible de les obtenir en consultant des tables ou en utilisant l'outil informatique.

Il existe un algorithme qui permet d'obtenir rapidement et en grand nombre des valeurs très correctes pour les coefficients de Fourier. Il s'agit de la TFR (Transformation de Fourier Rapide) ou encore en anglais FFT (Fast Fourier Transform).

Voici, à titre d'exemple, ce que donne le logiciel DERIVE pour le signal périodique de période 3 défini sur [0 ; 3[par $s(t) = t$. (Ce signal a été étudié chapitre 5 page 60.)

E_7 à E_{10}



BILAN

Soit s un signal défini sur $\mathbb{R}$ périodique de période T ($T > 0$).
On pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

1. Coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier de s sont donnés par les formules :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,\mathrm{d}t \text{ et pour tout entier naturel } k \text{ non nul}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Si le signal s est pair, les coefficients b_k sont tous nuls.
Si le signal s est impair, les coefficients a_0 et a_k sont tous nuls.
Dans les égalités précédentes, on peut remplacer les intégrales de $-\dfrac{T}{2}$ à $\dfrac{T}{2}$ par des intégrales de 0 à T.

2. Harmoniques d'un signal périodique

- Les harmoniques du signal s sont les signaux :
$t \mapsto a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$
(k est le rang de l'harmonique ; l'harmonique de rang 1 est le fondamental).
- L'harmonique de rang k s'il n'est pas nul est un signal sinusoïdal d'amplitude $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ et de fréquence $k \times \dfrac{1}{T}$ ou encore kf avec $f = \dfrac{1}{T}$.

3. Signal polynôme de Fourier d'ordre *n*

Le signal polynôme de Fourier d'ordre *n* associé au signal s est le signal polynôme trigonométrique défini sur $\mathbb{R}$ par :
$t \mapsto a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \ldots + a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$.
(Ce signal polynôme trigonométrique est lui aussi périodique de période T.)

4. Valeur moyenne. Énergie moyenne

- **La valeur moyenne** $\overline{s}$ du signal s sur un intervalle de longueur T est égale à a_0.
- **L'énergie moyenne** E_m transportée, sur un intervalle de longueur T, par le signal polynôme de Fourier d'ordre n associé au signal s est égale à :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2\right) \quad \textit{(relation de Parseval)}.$$

POUR S'ENTRAÎNER

EXERCICE 1

On considère le signal polynôme trigonométrique s défini sur $\mathbb{R}$ par

$t \mapsto \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sin(100\pi t + 1) + 3\cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

$+ 4\sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\sin(400\pi t)$.

1. Montrer que s est périodique de période $\frac{1}{50}$.

2. Indiquer quelle est la valeur moyenne de s sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

3. Vérifier que l'écriture en sinus et cosinus de s est :

$\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sin 1\cos(100\pi t) + \frac{1}{2}\cos 1 \sin(100\pi t)$

$+ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}\right)\cos(200\pi t)$

$+ \left(2 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin(200\pi t) - \frac{1}{4}\sin(400\pi t)$.

En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'énergie moyenne transportée par s sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

EXERCICE 2

On considère le signal f défini pour tout t réel par $f(t) = \sin(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)$.
$f(t)$ est une tension exprimée en volts, t est exprimé en secondes.

1. On rappelle la relation : pour tout u réel, $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2 u$.
Montrer que $f(t)$ peut s'écrire
$a_0 + a_1\cos(2\pi t) + b_1\sin(2\pi t) + a_2\cos(4\pi t) + b_2\sin(4\pi t)$.

2. En appliquant la relation de Parseval, calculer l'énergie moyenne transportée par le signal s pendant une seconde.

3. Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f^2(t)\,dt$.

EXERCICE 3

On considère les deux signaux s_1 et s_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$t \mapsto 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ et

$t \mapsto 2\sqrt{3}\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$. On pose $s = s_1 + s_2$.

1. Montrer que s est périodique de période $\frac{1}{50}$.

2. Indiquer quelles sont les énergies moyennes $E_m(s_1)$ et $E_m(s_2)$ des signaux s_1 et s_2 sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

3. Donner l'écriture en sinus et cosinus du signal s, en déduire l'énergie moyenne $E_m(s)$ transportée par s sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

4. Vérifier que $E_m(s) = E_m(s_1) + E_m(s_2)$.

EXERCICE 4

On considère les deux signaux u_1 et u_2 définis sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$t \mapsto 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ et

$t \mapsto 2\sqrt{3}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$. On pose $u = u_1 + u_2$.

1. Montrer que u est périodique de période $\frac{1}{50}$. Indiquer la nature du signal u.

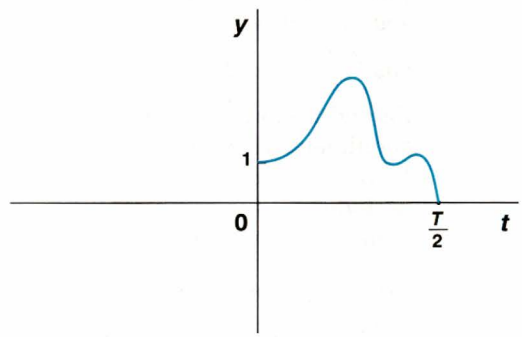
2. Indiquer quelles sont les énergies moyennes $E_m(u_1)$ et $E_m(u_2)$ des signaux u_1 et u_2 sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

3. Donner l'écriture en sinus et cosinus du signal u, en déduire l'énergie moyenne $E_m(u)$ transportée par u sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

4. A-t-on $E_m(u) = E_m(u_1) + E_m(u_2)$?

EXERCICE 5

Le signal s est défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période T ($T > 0$) et pair.
Dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy) la représentation graphique de s considéré sur l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ est la suivante :



1. Construire la représentation graphique de s sur $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

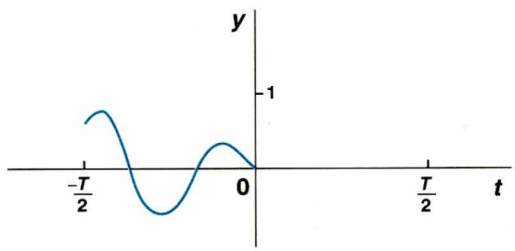
2. Sachant que $\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = \frac{3T}{4}$, donner la valeur de $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt$.

EXERCICE 6

Le signal u est défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période T ($T > 0$) et impair.

1. Montrer que $u(0) = 0$.

2. Dans le plan rapporté au repère orthogonal (Ot, Oy) la représentation graphique de u considéré sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}; 0\right]$ est la suivante :



Construire la représentation graphique de u considéré sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$.

Donner la valeur de l'intégrale $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,dt$.

EXERCICE 7

On considère le signal s, défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 1 + \cos(2\pi t)^2$.

1. Pour tout réel t, calculer $s(t+1)$. En déduire que le signal s est périodique de période 1.

2. Le logiciel DERIVE, pour le signal polynôme de Fourier d'ordre 5 associé au signal s périodique de période 1 donne :

$\cos\frac{(4\pi t)}{2} + 2\cos 2\pi t + \frac{3}{2}$.

En déduire, avec les notations du cours, les coefficients de Fourier a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 du signal s périodique de période 1.

Peut-on affirmer que : pour tout t réel,

$s(t) = \frac{3}{2} + 2\cos(2\pi t) + \frac{\cos(4\pi t)}{2}$?

3. En développant $(1 + \cos(2\pi t))^2$, puis en utilisant la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$, montrer que pour tout t de $\mathbb{R}$ on a :

$s(t) = \frac{3}{2} + 2\cos(2\pi t) + \frac{\cos(4\pi t)}{2}$.

4. Calculer $\int_{-0,5}^{0,5} (1+\cos(2\pi t))^4\,dt$.

EXERCICE 8

1. Le signal s est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $\frac{1}{50}$.

Écrire, à l'aide d'intégrales, les coefficients de Fourier a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 de s.

2. Le signal u est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t^2 + 3t$.

Écrire, à l'aide d'intégrales, les coefficients de Fourier a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 de u. (On ne demande pas de les calculer.)

3. Le signal v est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $\frac{1}{100}$.

Les premiers coefficients de Fourier de v sont :
$a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{\pi}{2}$; $a_3 = \frac{1}{10}$; $b_1 = 2$; $b_2 = \frac{1}{2}$ et $b_3 = \frac{1}{4}$.

Écrire le signal polynôme de Fourier F_3, de rang 3, associé à v.

4. Le signal w est défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période π.

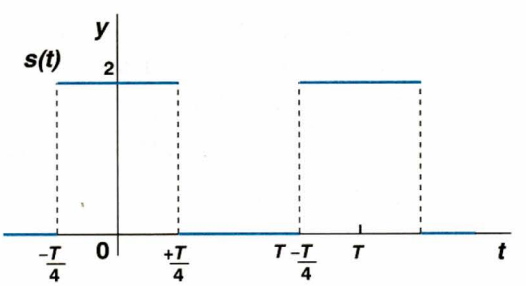
Les premiers coefficients de Fourier de w sont :
$a_0 = 0$; $a_1 = \frac{4}{\pi}$; $a_2 = -\frac{9}{\pi}$; $a_3 = 0$; $b_1 = -\frac{2}{\pi}$; $b_2 = 0$; $b_3 = \frac{2}{\pi}$.

Écrire le signal polynôme de Fourier F_3, de rang 3, associé à w.

EXERCICE 9

T étant un nombre strictement positif, on considère le signal s défini sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T tel que :

$$\begin{cases} s(t) = 2 & \text{si } -\frac{T}{4} \leqslant t \leqslant \frac{T}{4} \\ s(t) = 0 & \text{si } \frac{T}{4} < t < T - \frac{T}{4}. \end{cases}$$



1. Calculer la valeur moyenne a_0 du signal sur l'intervalle [0 ; T].

(On rappelle que $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\ \mathrm{d}t$.)

2. Calculer les nombres a_1 et b_1 définis par :

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\ \mathrm{d}t$$

et $\quad b_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\ \mathrm{d}t.$

3. Les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés, pour tout $n \geqslant 1$ par $a_n = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$; $b_n = 0$.

On note pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Exprimer c_n en fonction de n et représenter le spectre d'amplitude du signal s pour les fréquences appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{T}\,;\frac{5}{T}\right]$.

EXERCICE 10

On considère le signal s de la variable t, défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π tel que :

$$\begin{cases} s(t) = 1 & \text{si } 0 < t \leqslant \pi \\ s(t) = -1 & \text{si } -\pi \leqslant t \leqslant 0 \end{cases}$$

1. On utilise les notations du cours. Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5 du signal s .

En déduire les signaux polynômes de Fourier F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 associés au signal s.

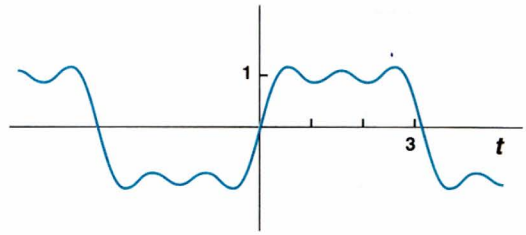
2. On considère le signal S polynôme trigonométrique obtenu en faisant la moyenne des cinq signaux mentionnés à la question précédente :

$S = \frac{1}{5}[F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5]$.

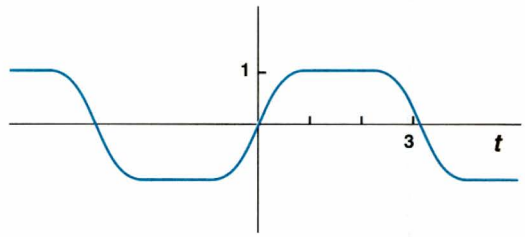
Montrer que, pour tout t réel, on a :

$$S(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin(3t)}{5} + \frac{\sin(5t)}{25}\right).$$

3. Voici les représentations graphiques dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy) de F_5 et de S.



Courbe représentative de F_5



Courbe représentative de S

Au plan du dessin, on souhaite remplacer la représentation graphique de s dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy), par l'une des deux courbes présentées ci-dessus.

Quelle est la courbe qui semble répondre le mieux au problème posé ?

4. Calculer les énergies moyennes $E_m(s)$, $E_m(S)$, $E_m(F_5)$ transportées par les signaux s, S et F_5 sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

5. On note e le signal d'erreur fait en remplaçant s par F_5 ($e = s - F_5$) et e_1 le signal d'erreur fait en remplaçant s par S ($e_1 = s - S$).

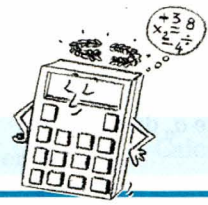
Le calcul des énergies moyennes $E_m(e)$ et $E_m(e_1)$ transportées par e et e_1 sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ donne :

$$E_m(e) = 1 - \frac{2072}{225\pi^2} \quad \text{et} \quad E_m(e_1) = 1 - \frac{16616}{1875\pi^2}.$$

a. Vérifier que $E_m(e) = E_m(s) - E_m(F_5)$.

b. A-t-on $E_m(e_1) = E_m(s) - E_m(S)$?

c. Montrer que $E_m(e) \leqslant E_m(e_1)$.

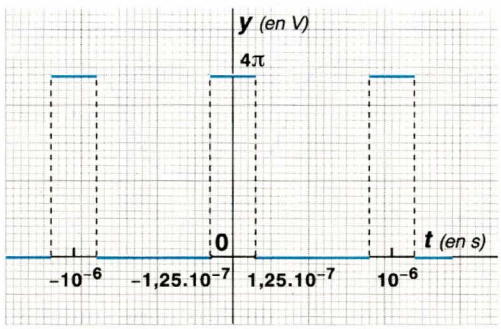


LE JOUR DU BAC

Énoncé

Sur le réseau Token-Ring d'un groupe de distribution commercial circulent des informations dont le débit est de 4 Mb/s ($4 \cdot 10^6$ b $\cdot$ s^{-1}).

On considère le signal noté f dont la courbe représentative dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy) est présentée ci-dessous.



Le signal f est supposé périodique de période T de valeur 10^{-6} (exprimée en seconde).

On se propose de déterminer le signal polynôme trigonométrique de Fourier d'ordre 2 associé au signal f de période T. Ce signal polynôme trigonométrique est noté P_2.

On rappelle que pour tout t réel,

$$P_2(t) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T}2t\right) \text{ avec}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t\,;$$

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t\,;$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t\,;$$

$$b_2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t.$$

1. On sait que ce signal f est soit pair, soit impair. Laquelle de ces deux propositions peut-on retenir ? Justifier la réponse d'après le graphique et en déduire les conséquences pour certains coefficients de P_2.

2. Calculer la valeur moyenne a_0 du signal f sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

3. Montrer que

$$a_1 = \frac{4}{10^{-6}}\int_0^{1,25\cdot10^{-7}} 4\pi\cos(2\cdot10^{-6}\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Calculer a_1. (On donnera la valeur exacte.)

4. En sachant que pour ce signal f les coefficients de Fourier a_k sont de la forme $\frac{8}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$, pour tout k entier supérieur ou égal à 2, donner la valeur de a_2.

5. Calculer l'énergie moyenne E transportée pendant 10^{-6} seconde par le signal P_2.

Solution

1. L'apparente symétrie de la courbe représentative par rapport à l'axe des ordonnées indique que le signal est pair. Les coefficients b_1 et b_2 sont donc nuls.

2. Par un calcul d'aire immédiat, il vient : $a_0 = \frac{1}{10^{-6}}(4\pi\cdot2{,}5\cdot10^{-7})$ soit $a_0 = \pi$.

3. La fonction f étant paire on peut écrire que $a_1 = 2 \times \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t$. Par ailleurs $T = 10^{-6}$ et sur l'intervalle $\left[0;\frac{T}{2}\right]$, qui est aussi l'intervalle $[0\,;\,0{,}5\cdot10^{-6}]$, la fonction f est telle que : pour $0 \leqslant t \leqslant 1{,}25\cdot10^{-7}$ $f(t) = 4\pi$ et pour

$1{,}25 \cdot 10^{-7} \leqslant t \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ $f(t) = 0$. Donc $a_1 = \dfrac{4}{10^{-6}} \displaystyle\int_0^{1{,}25 \cdot 10^{-7}} 4\pi \cos(2 \cdot 10^6 \pi t)\, dt$.

D'où, en rappelant que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(2 \cdot 10^6 \pi t)}{2 \cdot 10^6 \pi}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \cos(2 \cdot 10^6 \pi t)$, il vient :

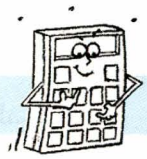
$a_1 = \dfrac{16\pi}{10^{-6}} \times \dfrac{\sin(2 \cdot 10^6 \pi \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-7})}{2 \cdot 10^6 \cdot \pi}$. Soit $a_1 = 8 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et finalement $a_1 = 8\sqrt{2}$.

4. Pour a_2 la formule, proposée dans l'énoncé donne $\dfrac{8}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, soit 4.

5. D'après la formule de Parseval

$E = \pi^2 + \dfrac{1}{2}\left((8\sqrt{2})^2 + 4^2\right)$ soit encore $E = \pi^2 + 72$.

POUR APPROFONDIR



PROBLÈME 1 ●● ✔

Pour chacun des signaux s suivants définis sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π, on donne son signal polynôme de Fourier de rang 3, soit F_3, qui lui est associé.
On note e le signal « d'erreur » provenant du remplacement de s par F_3 soit $e = s - F_3$.
Dans chaque cas :

1. Donner la représentation graphique de s dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy).

2. Donner le spectre d'amplitude de s pour les fréquences $\dfrac{1}{2\pi}$; $\dfrac{1}{\pi}$ et $\dfrac{3}{2\pi}$.

3. Calculer l'énergie moyenne $E_m(s)$ transportée par le signal s sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

4. Calculer l'énergie moyenne $E_m(F_3)$ transportée par le signal F_3 sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

5. Calculer l'énergie moyenne $E_m(e)$ transportée par le signal e sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
On admet que $E_m(e) = E_m(s) - E_m(F_3)$.

6. Calculer $10 \log\left(\dfrac{E_m(s)}{E_m(e)}\right)$ (où log désigne le logarithme décimal).

1er cas
$s(t) = t$ pour $-\pi \leqslant t < \pi$
$F_3(t) = 2\left(\sin t - \dfrac{\sin(2t)}{2} + \dfrac{\sin(3t)}{3}\right)$.

2e cas
$\begin{cases} s(t) = t & \text{pour } 0 \leqslant t < \pi \\ s(t) = -t & \text{pour } -\pi \leqslant t < 0 \end{cases}$
$F_3(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos t + \dfrac{\cos(3t)}{9}\right)$.

3e cas
$s(t) = t$ pour $0 \leqslant t < 2\pi$
$F_3(t) = \pi - 2\left(\sin t + \dfrac{\sin(2t)}{2} + \dfrac{\sin(3t)}{3}\right)$.

4e cas
$s(t) = t^2$ pour $-\pi \leqslant t < \pi$
$F_3(t) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos t - \dfrac{\cos(2t)}{4} + \dfrac{\cos(3t)}{9}\right)$.

PROBLÈME 2 BAC PRO ✔

1. On considère le signal u, défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et impair tel que :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{pour } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{8} \\ u(t) = 1 & \text{pour } \dfrac{\pi}{8} \leqslant t < \dfrac{7\pi}{8} \\ u(t) = 0 & \text{pour } \dfrac{7\pi}{8} \leqslant t < \pi \end{cases}$$

a. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy), représenter graphiquement le signal u considéré sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

b. Indiquer quelle est la valeur moyenne de ce signal sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

c. Calculer les coefficients de Fourier a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} et b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} du signal u.

d. Donner le spectre d'amplitude de u pour les fréquences de $\frac{1}{2\pi}$ à $\frac{5}{\pi}$.

e. Sur le diagramme réalisé à la question **a.** faire apparaître le fondamental du signal u.

2. On « découpe » le signal u.
On considère le signal s, défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et impair tel que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 \text{ pour } 0 \leqslant t < \frac{\pi}{8} \\ s(t) = 1 \text{ pour } \frac{\pi}{8} \leqslant t < \frac{\pi}{4} \\ s(t) = 0 \text{ pour } \frac{\pi}{4} \leqslant t < \frac{3\pi}{8} \\ s(t) = 1 \text{ pour } \frac{3\pi}{8} \leqslant t < \frac{5\pi}{8} \\ s(t) = 0 \text{ pour } \frac{5\pi}{8} \leqslant t < \frac{3\pi}{4} \\ s(t) = 1 \text{ pour } \frac{3\pi}{4} \leqslant t < \frac{7\pi}{8} \\ s(t) = 0 \text{ pour } \frac{7\pi}{8} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

a. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy), représenter graphiquement le signal s considéré sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

b. Indiquer quelle est la valeur moyenne de ce signal sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

c. Calculer les coefficients de Fourier a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 du signal s.

d. Avec une FFT on obtient comme valeurs (approchées) de b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10} les nombres suivants : 0 ; 0,318 ; 0 ; – 0,366 ; 0 ; – 0,285 ; 0.
Donner le spectre d'amplitude de s pour les fréquences de $\frac{1}{2\pi}$ à $\frac{5}{\pi}$.

e. Sur le diagramme réalisé à la question **1. a.** faire apparaître le fondamental de s.

PROBLÈME 3 ●●

α est un nombre réel tel que $0 \leqslant \alpha < \pi$.
Soit s le signal périodique de période 2π, défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} s(t) = 0 \text{ pour } 0 \leqslant t < \pi - \alpha \\ s(t) = 1 \text{ pour } \pi - \alpha \leqslant t < \pi + \alpha \\ s(t) = 0 \text{ pour } \pi + \alpha \leqslant t < 2\pi. \end{cases}$$

Montrer que le signal polynôme de Fourier d'ordre 2 associé au signal s périodique de période 2π est défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\sin\alpha\cos t - \frac{\sin(2\alpha)\cos(2t)}{2}\right).$$

PROBLÈME 4 BAC PRO ✔

On considère le signal s, défini sur $\mathbb{R}$, périodique de période $\frac{1}{50}$ tel que :

$$\begin{cases} s(t) = -100t \text{ pour } -\frac{1}{100} \leqslant t \leqslant 0 \\ s(t) = 100t \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{100}. \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy), donner la représentation graphique du signal s considéré sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{25} ; \frac{1}{25}\right]$.

2. Calculer la valeur moyenne de s sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{100} ; \frac{1}{100}\right]$.

3. Quelle est la valeur du coefficient de Fourier b_1 de ce signal ?

4. Calcul de a_1.
a. Soit le signal u défini sur $\mathbb{R}$ par
$t \mapsto \frac{1}{\pi}\left[t\sin(100\pi t) + \frac{1}{100\pi}\cos(100\pi t)\right]$.
– Calculer $u(0)$ et $u\left(\frac{1}{100}\right)$.
– Déterminer le signal dérivé u' du signal u.
b. Calculer a_1.

5. Donner le signal polynôme de Fourier F_1 de rang 1 associé au signal s.

PROBLÈME 5

1re partie

Mise en place de formules de trigonométrie.
Soient a et b deux nombres réels. Vérifier, en utilisant le formulaire, que pour tous a et b :

$$\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} = \sin a \sin b$$

et $$\frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} = \sin a \cos b.$$

En déduire que pour tout t réel :

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

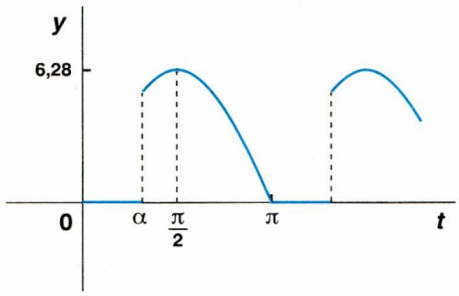
$$\sin t \cos t = \frac{\sin(2t)}{2}$$

$$\sin t \sin 2t = \frac{\cos t - \cos(3t)}{2}$$

$$\sin t \cos(2t) = \frac{\sin(3t) - \sin t}{2}.$$

2e partie

Un variateur de vitesse est équipé d'un pont de puissance mixte qui délivre le signal représenté ci-dessous dans le plan rapporté au repère (Ot, Oy) où α est un nombre réel tel que $0 < \alpha < \pi$.



Le réel α étant fixé ($0 < \alpha < \pi$), on considère le signal u défini sur $\mathbb{R}$ périodique de période π tel que :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } 0 \leqslant t < \alpha \\ u(t) = 2\pi \sin t & \text{si } \alpha \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

1. Calculer la valeur moyenne $\overline{u}$ du signal u sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. Calcul de l'énergie moyenne $E_m(u)$ transportée par le signal u sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

a. Montrer que $E_m(u) = 2\pi \displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} (1 - \cos(2t))\, dt$.

b. Déterminer le signal dérivé du signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \sin(2t)$.

c. Calculer $E_m(u)$.

3. Détermination du signal de Fourier F_1 de rang 1, associé au signal u.

a. Montrer que (notations du cours) :

$$a_1 = 4 \int_{\alpha}^{\pi} \sin t \cos(2t)\, dt$$

et $\quad b_1 = 4 \displaystyle\int_{\alpha}^{\pi} \sin t \sin(2t)\, dt$.

b. Déterminer les signaux dérivés des signaux définis sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto \sin(3t)$ et $t \mapsto \cos(3t)$.

c. Calculer a_1 et b_1.

d. Donner le signal de Fourier F_1 de rang 1, associé au signal u.

e. Calculer l'énergie moyenne transportée par F_1 sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

PROBLÈME 6 ●●

On injecte un signal s rectangulaire de période T_0 (T_0 = 0,2 seconde) sur une ligne de transmission de données afin de la tester. La ligne se comporte comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c.

On suppose que les trois premiers harmoniques de s passent dans le filtre, tous les autres, au-delà du troisième sont éliminés ; le signal v ainsi obtenu est tel que :

pour tout t réel,

$$v(t) = 4 \sin(10\pi t) + \frac{4}{3} \sin(30\pi t).$$

1. On note v_1 et v_2 les signaux définis recpectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto \sin(10\pi t)$ et $t \mapsto \sin(30\pi t)$.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy) en prenant 9 cm pour 0,1 s sur l'axe (Ot) et 3 cm pour unité sur l'axe (Oy).

Dans ce plan :

a. Donner les courbes représentatives de v_1 et v_2 considérés sur l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$ puis celle de $\frac{1}{3} v_2$ sur le même intervalle.

b. Construire la courbe représentative de $0,5\left(v_1 + \frac{1}{3} v_2\right)$ sur l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$.

c. Construire la courbe représentative de v sur l'intervalle $[-0,1 ; 0,1]$.

2. Calculer la valeur efficace du signal v.

PROBLÈME 7 ●●

On considère un signal u périodique de période 1/500 dont l'expression du polynôme de Fourier d'ordre 7 est pour tout t réel :

$$u(t) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \sin(1000\pi t) - \frac{10}{3\pi} \sin(3\,000\pi t) + \frac{10}{5\pi} \sin(5\,000\pi t) - \frac{10}{7\pi} \sin(7\,000\pi t).$$

$u(t)$ est une tension exprimée en volt (V) et les fréquences sont exprimées en hertz (Hz).

1. Donner la valeur moyenne du signal u.

2. Déterminer la fréquence f_1 et l'amplitude C_1 du fondamental du signal u.

3. On note f_k la fréquence et C_k l'amplitude de l'harmonique de rang k du signal u.

Donner les couples de valeur (f_k, C_k) pour tout k entier naturel compris entre 2 et 7 ($2 \leqslant k \leqslant 7$).

4. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Of, Ou) avec en abscisse 1 cm pour 250 Hz et en ordonnée 2 cm pour 1 V, construire le diagramme en bâtons qui à chaque fréquence $f_1, f_2, \ldots, f_7$ fait respectivement correspondre $C_1, C_2, \ldots, C_7$.

PROBLÈME 8 ●●

1re partie

Mise en place de formules de trigonométrie

Soient a et b deux nombres réels. Vérifier, en utilisant le formulaire, que :

$$\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} = \sin a \sin b$$

et $$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} = \sin a \cos b.$$

2e partie

Travail sur des signaux périodiques

On rappelle que pour tout nombre réel x, la valeur absolue du nombre x notée $|x|$ est égale à x si x est positif et à $-x$ si x est négatif.

u étant le signal sinusoïdal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2 \sin(100\,\pi t)$, on note v le signal défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto |2 \sin(100\,\pi t)|$.

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ot, Oy), donner les courbes représentatives des signaux u et v considérés sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{50}\right]$.

2. Quelle est la période fondamentale du signal u ? Quelle est celle de v ?

3. Après avoir constaté que le signal v est pair, déterminer le signal polynôme de Fourier d'ordre 1 associé au signal v périodique de période $\frac{1}{100}$.

PROBLÈME 9 — BAC PRO

1re partie

Détermination du signal dérivé d'un signal donné

Le nombre a étant un réel non nul, on considère le signal f défini sur $\mathbb{R}$ par :

$t \mapsto \frac{1}{a^2} \sin(at) - \frac{t}{a} \cos(at)$.

1. Montrer que le signal f' signal dérivé de f est défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t \sin(at)$.

2. Déterminer un signal G dont le signal dérivé G' est défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto t \cos(at)$.

2e partie

Calculs d'intégrales

Calculer, en utilisant le résultat de la question **1.** les intégrales suivantes :

$\int_0^{2\pi} t \sin t \, dt$; $\int_0^{2\pi} t \sin(2t) \, dt$;

$\int_0^{2\pi} t \sin(3t) \, dt$; $\int_0^{2\pi} t \sin(4t) \, dt$;

$\int_0^{2\pi} t \cos t \, dt$; $\int_0^{2\pi} t \cos(2t) \, dt$;

$\int_0^{2\pi} t \cos(3t) \, dt$; $\int_0^{2\pi} t \cos(4t) \, dt$.

3e partie

Détermination des quelques harmoniques d'un signal périodique

V étant une constante réelle strictement positive fixée, on considère le signal s périodique de période $2\,\pi$ défini sur $\mathbb{R}$ et tel que, pour tout t de l'intervalle $[0 ; 2\,\pi[$, $s(t) = \frac{V}{2\pi} t$.

1. Donner, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, la courbe représentative du signal s considéré sur l'intervalle $[-4\,\pi ; 4\,\pi]$.

2. On pose, pour tout k entier naturel non nul :

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(t) \sin(kt) \, dt \text{ et}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s(t) \cos(kt) \, dt.$$

Calculer, en fonction de V, les nombres a_1 ; b_1 ; a_2 ; b_2 ; a_3 ; b_3 ; a_4 et b_4.

3. Écrire le fondamental, les deuxième, troisième et quatrième harmoniques du signal s.

4. On note A_1 l'amplitude du fondamental de s, A_2, A_3 et A_4 les amplitudes respectives de ses deuxième, troisième et quatrième harmoniques.

Vérifier que, pour $n = 2$, 3 et 4, $\frac{A_n}{A_1} = \frac{1}{n}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES ELÉMENTS DE RÉPONSES

1 DÉRIVATION – COMPLÉMENTS

EXERCICE 1

1. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ **2.** $f'(x) = 1 + e^x$.

3. $f'(x) = -2 + 0{,}25\, e^{0{,}5x}$

4. $f'(x) = \frac{3x^2}{4} + 2 - \frac{5}{x}$.

EXERCICE 2

Sur $]0, +\infty[$, si $f(x) = \log x$ alors
$f'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$.

EXERCICE 3

Sur $\mathbb{R}$, si $f(x) = 10^x$, alors
$f'(x) = (\ln 10) \times 10^x$.

EXERCICE 4

Notons f la fonction ln.

1. $f'(1) = 1$.

2. $f'(e) = \frac{1}{e}$; le coefficient directeur de (OB) est $\frac{1}{e}$, donc la tangente à $\mathscr{C}$ en B est la droite (OB).

EXERCICE 5

Notons f la fonction sinus.

1. $f'(0) = 1$.

2. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. La tangente en A (0 ; 0) origine du repère est la droite d'équation $y = x$.

La tangente en B $\left(\frac{\pi}{2} ; 1\right)$ est parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 6

1. $f'(x) = e^x + xe^x$.

2. $f'(x) = \ln x + 1$.

3. $f'(x) = \cos^2 t - \sin^2 t$.

4. $f'(x) = -2 \cos x \sin x$.

5. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

6. $f'(x) = \frac{26}{(4x+3)^2}$.

7. $f'(x) = \frac{10\,927\,500}{(x+4\,650)^2}$.

8. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.

EXERCICE 7

1. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1 + x$ et $v(x) = x - 2$

$f'(x) = -\frac{3}{(x-2)^2}$

2. $f'(x) = -5\left(\frac{-2}{(2x+3)^2}\right)$; $f'(x) = \frac{10}{(2x+3)^2}$.

3. $f(x) = \sqrt{2}\,\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x$

et $v(x) = 1 - x$

$f'(x) = \sqrt{2}\,\frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2}$; $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{(1-x)^2}$.

4. $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1 - 3x$ et

$v(x) = 2x + 1$ $f'(x) = \frac{(-3)(2x+1) - (1-3x)(2)}{(2x+1)^2}$;

$f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2}$.

5. Soit g la fonction définie sur I par $x \mapsto x \ln x$;

$f'(x) = -3(2x) + \frac{1}{2} + g'(x)$

$g(x) = u(x)\, v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$

$g'(x) = (1)(\ln x) + x\,\frac{1}{x}$; $g'(x) = \ln x + 1$

d'où $f'(x) = -6x + \frac{3}{2} + \ln x$.

6. Soit g la fonction définie sur I par $x \mapsto x^2 \ln x$;

$g(x) = u(x)\, v(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$

$g'(x) = (2x) \ln x + x^2\,\frac{1}{x}$;

$g'(x) = 2x \ln x + x$

d'où $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x \ln x + x$.

EXERCICE 8

1. 2. $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; $f'(x) > 0$.

3. La fonction f est croissante ; $f(0) = 1$ et $f(2) = \frac{5}{3}$.

4. Coefficient directeur de la tangente : $f'(1) = \frac{1}{4}$.

PROBLÈME 2

1. $f(x) = 400\,\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = (0{,}5 + x)^2$

$f'(x) = 400\,\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2(0{,}5 + x)$

d'où $f'(x) = \frac{400}{(0{,}5+x)^3} \times (0{,}5 - x)$.

Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $0{,}5 - x$, c'est-à-dire de $1 - 2x$.

2. La fonction f présente un maximum pour $x = 0{,}5$.
La puissance dissipée dans le circuit est maximale lorsque la résistance variable est égale à la résistance interne du générateur.

PROBLÈME 4

1. $f(x) = \ln 2 + \ln x$ d'où $f'(x) = \frac{1}{x}$.

2. De manière analogue, $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $h'(x) = \frac{1}{x}$

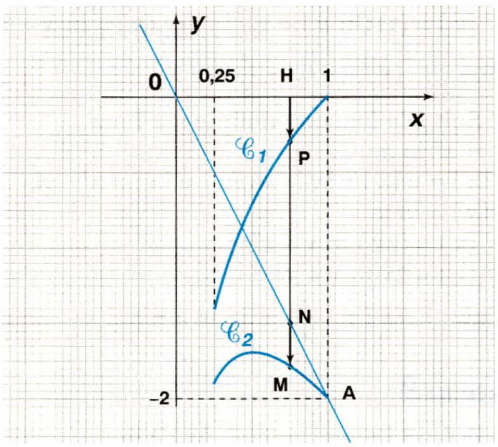
$k(x) = g(x) \times h(x)$ d'où

$k'(x) = \frac{1}{x}(\ln(7x) + \ln(4x))$

on peut encore écrire $k'(x) = \frac{1}{x} \ln(28\,x^2)$.

PROBLÈME 5

Première partie
La figure suivante donne l'allure de la courbe.



$\mathscr{C}_1$ représente la fonction ln et $\mathscr{C}_2$ la fonction f ; on a $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{HP}$.
Il semble que f présente un maximum pour $x = 0{,}5$.

Deuxième partie

1. $f'(x) = \frac{1-2x}{x}$.

2. 3. $f'(x)$ a le signe de $1 - 2x$.

4. La fonction f présente un maximum pour $x = 0{,}5$
maximum : $f(0{,}5) = -\ln 2 - 1$; $f(0{,}5) \approx -3{,}39$

PROBLÈME 8

2. Pour $x \geqslant 0$, on a $-50x \leqslant 0$ donc $e^{-50x} \geqslant 1$ d'où $f(x) \geqslant 0$.

3. $0{,}5 - f(x) = 0{,}5\,e^{-50x}$.
Pour tout x réel, $e^{-50x} > 0$, donc sur $[0 ; +\infty[$, on a $0{,}5 - f(x) > 0$
c'est-à-dire $f(x) < 0{,}5$.

4. $f(x_1) = 0{,}25$ s'écrit $0{,}5\,(1 - e^{-50x_1}) = 0{,}25$

ou $1 - e^{-50x_1} = 0{,}5$ soit $e^{-50x_1} = 0{,}5$

d'où $x_1 = -\frac{1}{50} \ln(0{,}5)$; $x_1 \approx 0{,}0139$.

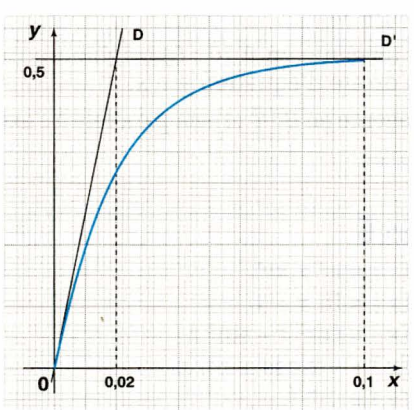
5. La dérivée de $x \mapsto e^{-50x}$ est $x \mapsto (-50)\,e^{-50x}$ d'où $f'(x) = 25\,e^{-50x}$.
On a pour tout x réel, $e^{-50x} > 0$ donc sur $[0 ; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$.
La fonction f est croissante.

6. $f(0{,}1) \approx 0{,}4966$ (valeur arrondie à 10^{-4})
Pour $x > 0{,}1$ puisque f est croissante on a $f(x) \geqslant f(0{,}1)$ donc $f(x) > 0{,}496$.
Comme on sait que $f(x) < 0{,}5$; on a si $x > 0{,}1$ $\quad 0{,}496 < f(x) < 0{,}5$.

7. a $f'(0) = 25$; la droite D a pour équation $y = 25x$.
Coordonnées du point commun à D et D' : $(0{,}02 ; 0{,}5)$

b $f(0{,}05) \approx 0{,}459$; $f'(0{,}05) \approx 2{,}05$

c La figure suivante donne l'allure de la courbe.



2 CALCUL INTÉGRAL

Pour les exercices 1 à 3, c désigne un nombre réel.

EXERCICE 1

1. $F(x) = 2x^2 - 3x + c$; $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + c$.

2. $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + c$

$F(x) = 0{,}5\,x^3 - 1{,}5\,x^2 + 4x + c$.

3. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ d'où

$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$

$f(x) = x^2 + x$ d'où $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$.

EXERCICE 2

1. $F(x) = \frac{4}{x} + c$.

2. $F(x) = -\frac{1}{x} + c$.

3. $F(x) = 5 \ln x + c$.

4. $F(x) = e^x - e^{-x} + c$.

5. $F(x) = \frac{x^2}{2} + e^x + c$.

6. $F(x) = \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$.

7. $F(x) = -\frac{2}{3}\,e^{-3x+1} + c$.

8. $F(x) = -\sin x + \cos x + c$.

9. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$.

10. $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - 1) + c$.

11. $F(x) = -2\cos(2x + 3) + c$.

EXERCICE 3

1. $F(x) = 2x^2 - 3x + c$; or $F(0) = c = 0$
donc $c = 0$ et $F(x) = 2x^2 - 3x$.

2. $F(x) = x^3 - \frac{5}{2}\,x^2 + c$; or

$F(1) = 1 - \frac{5}{2} + c$ donc $c = \frac{3}{2}$ et

$F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}$.

3. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + c$; or $F(1) = \frac{1}{2} + c$

donc $c = -\frac{1}{2}$ et $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x - \frac{1}{2}$.

4. $F(x) = x^2 + e^x + c$; or $F(0) = 1 + c$
donc $c = -2$ et $F(x) = x^2 + e^x - 2$.

5. $F(x) = -2\cos x + c$; or $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$

donc $c = 1$ et $F(x) = -2\cos x + 1$.

6. $F(x) = \frac{4}{3}\sin(3x) + c$ or $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{3} + c$

donc $c = \frac{10}{3}$ et $F(x) = \frac{4}{3}\sin(3x) + \frac{10}{3}$.

Pour calculer une intégrale, on détermine d'abord une primitive de la fonction à intégrer.

EXERCICE 4

1. $I = \left[3\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 - 0 = \frac{1}{2}$

$J = \left[t^2 + 4t\right]_0^3 = 9 + 12 - 0 = 21$.

2. $I = \left[\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} - t\right]_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 6 - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1\right) = 4{,}5$.

3. $I = \left[x^2 + x - 2\ln x\right]_1^2 = 4 - 2\ln 2$.

$J = \left[2x^2 - 5x - \frac{3}{x}\right]_1^2 = \frac{5}{2}$.

4. $I = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) - 1$

$J = \left[e^t + \frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\ln 2} = \frac{5}{2}$.

5. $I = \left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 2$; $J = \left[\sin t\right]_0^{\pi} = 0$.

6. $I = \left[-\frac{1}{3}\cos(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$;

$J = \left[-\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

EXERCICE 5

On vérifie que sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ on a $f(x) \geqslant 0$.
Si $\mathcal{A}$ désigne l'aire exprimée en unités d'aire,

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx\ .$$

1. $\mathcal{A} = \frac{8}{3}$ **4.** $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$.

2. $\mathcal{A} = \frac{5}{3}$ **5.** $\mathcal{A} = 2$.

3. $\mathcal{A} = \frac{32}{3}$.

EXERCICE 6

Soit B′ la projection orthogonale de B sur (Ox).

$\mathcal{A} = \mathcal{A}' - \int_0^1 e^x\,dx$; $\mathcal{A}'$ aire du trapèze OABB′.

$\mathcal{A}' = \frac{e+1}{2}$; $\mathcal{A} = \frac{3-e}{2}$.

PROBLÈME 4

$P = \dfrac{UI}{T}\displaystyle\int_0^T 2\sin(\omega t)\times\sin(\omega t-\varphi)\,dt$.

Calculons l'intégrale

$K = \displaystyle\int_0^T 2\sin(\omega t)\times\sin(\omega t-\varphi)\,dt$

$2\sin(\omega t)\times\sin(\omega t-\varphi) = \cos\varphi - \cos(2\omega t-\varphi)$.

La fonction $t \mapsto t\cos\varphi - \dfrac{1}{2\omega}\sin(2\omega t-\varphi)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \cos\varphi - \cos(2\omega t-\varphi)$

donc $K = \left[t\cos\varphi - \dfrac{1}{2\omega}\sin(2\omega t-\varphi)\right]_0^T$

$K = T\cos\varphi - \dfrac{1}{2\omega}\sin(4\pi-\varphi) + \dfrac{1}{2\omega}\sin(-\varphi)$

soit, puisque $\sin(4\pi-\varphi) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$,

$K = T\cos\varphi$

d'où $P = UI\cos\varphi$.

PROBLÈME 6

1. $f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$

avec $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1$

d'où $f'(x) = 4x^3$.

2. La fonction $x \mapsto x^4$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 4x^3$

donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^4$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}(4x^3)$

c'est-à-dire de la fonction g.

3. $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$; $\mathcal{A} = \dfrac{15}{4}$; $\mathcal{A} = 3{,}75$ ua.

PROBLÈME 7

1. Utilisons la TI 80 pour obtenir la table de valeurs :

• On rentre la fonction comme indiqué page 10

Y_1 =	X, T	×	2nd	LN	X, T

• On donne la valeur initiale de x, ici 0 et le « pas », ici 0,2

TBLMIN = 0

ΔTBL = . 2.

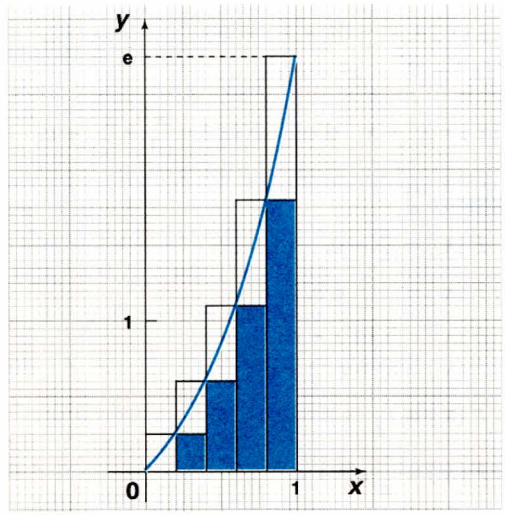
• On obtient l'affichage de la table à l'aide de l'instruction TABLE obtenue à l'aide des touches 2nd GRAPH

On lit alors :

X	Y_1
0	0,000
0,2	0,24428
0,4	0,59673
0,6	1,0933
0,8	1,7804
1	2,7183

2. $f'(x) = (x+1)e^x$

f est croissante sur [0 ; 1].



3. a L'allure de la courbe est la suivante :

$f'(0) = 1$; la tangente en 0 a pour coefficient directeur 1.

b $s \approx 0{,}742$; $s' \approx 1{,}286$

s représente la somme des aires des 4 rectangles coloriés.

s' représente la somme des aires des 5 rectangles situés « au-dessus » de la courbe.

$\dfrac{s+s'}{2} \approx 1{,}014$.

4. $g'(x) = xe^x$ d'où $I = [(x-1)e^x]_0^1$; $I = 1$.

3 NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

1. $z + z' = 6 - 2j$; $z - 2z' = 6 + 13j$; $zz' = 23 + 2j$.

2. $z + z' = 4 - 8j$; $z - 2z' = -5 + 13j$; $zz' = -4 - 10j$.

3. $z + z' = -4 + 5j$; $z - 2z' = 14 - 4j$; $zz' = -18 - 6j$.

EXERCICE 2

$(1 + j)(5 - j)(j - 2) = -16 - 2j$
$(2 + j)(j - 1)(1 - 2j) = -1 + 7j.$

EXERCICE 3

$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j$; $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}j$
$-\frac{7}{5} - \frac{11}{5}j$; $-\frac{19}{17} + \frac{9}{17}j$

EXERCICE 4

Les nombres z, $\bar{z}$, $-z$, $-\bar{z}$ sont représentés respectivement par :
$M_1(2 ; 3)$, $M_2(2 ; -3)$, $M_3(-2 ; -3)$, $M_4(-2 ; 3)$.
Les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont les sommets d'un rectangle de centre O origine du repère.

EXERCICE 5

A : $z = -1 + 2j$; B : $z = 3 - 2j$; C : $z = 1 + j$
$\overrightarrow{V_1}$: $z = 4 - 3j$; $\overrightarrow{V_2}$: $z = 2 + 5j$;
$\overrightarrow{V_3}$: $z = -1 - 3j$.

EXERCICE 6

1. L'image de z_1 est $M_1(4 ; 2)$; l'image de z_2 est $M_2(3 ; -4)$.
2. L'image z est M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$; M (7 ; – 2).
L'image de z' est M′ tel que
$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$; M′ (1 ; 6).
3. L'image de z_3 est le point $M_3(-1 ; -3)$.
L'image de z'' est le point M″ tel que
$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM_3}$; $M_3(6 ; -5)$.

EXERCICE 7

• $1 - j\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$
d'où $|z| = 2$ et Arg $z = -\frac{\pi}{3}$.

• $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$; $|z| = \sqrt{13}$; $|z| \approx 3{,}6$
tan (Arg z) $= \frac{3}{2}$; notons par raison de commodité $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ le nombre recherché par la séquence calculatrice, en mode radian
3 ÷ 2 = tan⁻¹ ; on obtient $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}983$.
L'image M de z est dans le 1er quadrant, donc, on a ici Arg $z = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
d'où Arg $z \approx 0{,}983$.

EXERCICE 8

1. • $|z| = 5$; tan (Arg z) $= \frac{4}{3}$.
À la calculatrice, on obtient, en mode radian, $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}927$.
Le point M image de z est dans le 1er quadrant, donc Arg $z \approx 0{,}927$.

• $|z| = \sqrt{8^2 + (-9)^2}$; $|z| = \sqrt{145}$; $|z| \approx 12$
tan (Arg z) $= -\frac{9}{8}$.
À la calculatrice, on obtient,
$\tan^{-1}\left(-\frac{9}{8}\right) \approx -0{,}844$.
Le point M image de z est dans le 4e quadrant, donc Arg $z \approx -0{,}844$.

2. • $|z| = \sqrt{10}$; $|z| \approx 3{,}16$
tan (Arg z) $= 3$.
À la calculatrice, en mode radian, on obtient $\tan^{-1}(3) \approx 1{,}249$.
Le point M image de z est dans le 3e quadrant, donc Arg $z = \tan^{-1}(3) - \pi$; Arg $z \approx -1{,}893$.

• $|z| = \sqrt{20}$; $|z| \approx 4{,}47$
tan (Arg z) $= -2$.
À la calculatrice $\tan^{-1}(-2) \approx -1{,}107$.
Le point M image de z est dans le 2e quadrant, donc Ag $z = -\tan^{-1}(-2) + \pi$; Arg $z \approx 2{,}034$.

EXERCICE 9

1. Pour $1 - j$:
module $\sqrt{2}$; argument principal : $-\frac{\pi}{4}$.
Pour $1 + j$:
module $\sqrt{2}$; argument principal : $\frac{\pi}{4}$.

2. Pour z : p = 2 ; Arg $z = 0$.
Pour z' : p = 1 ; Arg $z = -\frac{\pi}{2}$.

3. $z = 2$; $z' = \frac{(1-j)^2}{2} = -j$.

EXERCICE 10

1. Pour obtenir l'expression de $i(t)$, il faut la forme trigonométrique de $\underline{I}$; on a donc intérêt à considérer pour $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{Z}$ les formes trigonométriques.
$\underline{U} = [24 ; 0]$ et $\underline{Z} = \left[50 ; \frac{\pi}{6}\right]$.

On a $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$, d'où, en utilisant le résultat donné pour un quotient, la forme trigonométrique de $\underline{I}$: $\underline{I} = \left[\frac{24}{50} ; 0 - \frac{\pi}{6}\right]$ soit $\underline{I} = \left[0{,}48 ; -\frac{\pi}{6}\right]$.

2. On obtient alors $i(t) = 0{,}48\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 11

1. $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$ soit $\underline{Z} = 170 - 40j$.

2. $p = 10\sqrt{305}$; $p \approx 175$

$\tan^{-1}\left(-\frac{4}{17}\right) \approx -0{,}231$; $\arg z \approx -0{,}231$.

EXERCICE 12

1. $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$ d'où $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{1+2j} + \frac{1}{2-j}\right)$

$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{10}\left(\frac{1-2j}{5} + \frac{2+j}{5}\right) = \frac{1}{50}(3-j)$

$\underline{Z} = 5(3+j)$.

2. $p = 5\sqrt{10}$; $\arg z \approx 1{,}249$.

PROBLÈME 3

1. Si $m = 1$, $z = -\frac{j}{2}$ d'où $z = \left[\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$

Si $m = \sqrt{3}$, $z = -\frac{1+j\sqrt{3}}{4}$ d'où

$z = \left[\frac{1}{2}; -\frac{2\pi}{3}\right]$.

2. $z = \frac{1-m^2-2jm}{2(1+m^2)}$ d'où

$|z| = \frac{1}{2(1+m^2)} \times \sqrt{(1-m^2)^2 + 4m^2}$.

De $(1 - m^2)^2 + 4m^2 = (1 + m^2)^2$, on déduit $|z| = \frac{1}{2}$.

PROBLÈME 4

1. $z_1 = -3$; $z_2 = 1 + j$; $z_3 = 1 - j$.

2. $A_1A_2 = A_1A_3$; le triangle $A_1A_2A_3$ est isocèle ; il admet pour axe de symétrie l'axe des abscisses.

3. a Les coordonnées de B_2 et B_3 sont

$B_2(-7 ; -1)$ et $B_3(-7 ; 1)$

$z'_2 = -7 - j$ et $z'_3 = -7 + j$.

b $\frac{OB_2}{OA_2} = \frac{|z'_2|}{|z_2|}$; $\frac{OB_2}{OA_2} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25}$ d'où

$\frac{OB_2}{OA_2} = 5$.

PROBLÈME 7

1. $\underline{Z} = 25 + j\left(219{,}8 - \frac{10^6}{8 \times 314}\right)$

Nous prendrons $\underline{Z} = -25 - 178{,}29j$.

2. $|\underline{Z}| \approx 180$, d'où la valeur efficace de l'intensité : $I \approx \frac{24}{180}$

$I \approx 0{,}133$A.

3. Détermination principale de $\arg(\underline{Z}) \approx -1{,}43$

$i(t) \approx 0{,}133\sqrt{2}\sin(314t - 1{,}43)$.

4. La détermination principale de $\arg(\underline{Z})$ représente la détermination principale de l'angle $(\vec{U}, \vec{I})$.

5. Dans ce cas, on écrirait :

$i(t) \approx 0{,}133\sqrt{2}\sin(314t)$

$u(t) \approx 24\sqrt{2}\sin(314t + 1{,}43)$.

PROBLÈME 11

1re partie

1. a $(1 + jax)(1 + jbx) = 1 + j(a + b)x - abx^2$, d'où, par identification avec l'expression (1) le système (S).

b En remplaçant b par $\frac{1}{a}$ dans la première équation, on obtient l'équation d'inconnue a : $a^2 - 4a + 1 = 0$.

c L'équation a deux solutions :

$X_1 = 2 - \sqrt{3}$; $X_2 = 2 + \sqrt{3}$.

d $a = 2 - \sqrt{3}$ et $b = 1 + \sqrt{3}$.

2. On a $1 + 2jx - x^2 = (1 + jx)^2$; $c = 1$.

2e partie

1. $T(x) = 1 + jx - x^2$;

$|T(x)|^2 = (1 - x^2)^2 + x^2$

d'où $|T(x)|^2 = 1 - x^2 + x^4$.

2. $f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 1 - x^2 + x^4$

on a $u'(x) = -2x + 4x^3$ soit

$u'(x) = 2x(2x^2 - 1)$

d'où l'expression demandée pour $f'(x)$.

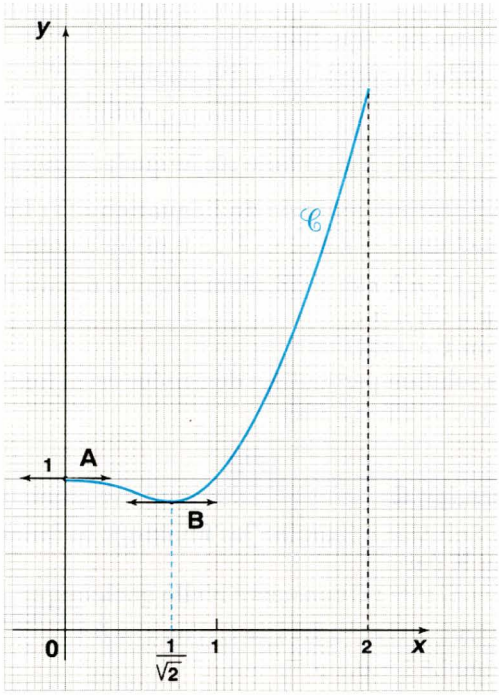
3. Sur $[0 ; 2]$, on a $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. On obtient le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		2
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\sqrt{13}$

La fonction présente un minimum égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. La figure suivante donne l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.
La courbe admet en A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



4 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Pour les exercices 1 à 12, on désigne par k un nombre réel arbitraire.

EXERCICE 1

Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x}$
$f(0) = k = 2$ d'où $f : x \mapsto 2\,e^{2x}$

EXERCICE 2

Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-x}$
$f(-1) = ke$ d'où $f : x \mapsto \frac{1}{e}\,e^{-x}$.

EXERCICE 3

Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-5x}$
$f(0) = k = 4$ d'où $f : x \mapsto 4\,e^{-5x}$.

EXERCICE 4

$2y' + y = 0$ ou $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{1}{2}x}$.

EXERCICE 5

f est solution de l'équation différentielle
$y' + 3y = 0$.
Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-3x}$
$f(0) = k = -4$ d'où $f : x \mapsto -4\,e^{-3x}$.

EXERCICE 6

$y' + 3y = 0$; solution générale : $x \mapsto k\,e^{-3x}$.

EXERCICE 7

On met, si nécessaire, l'équation sous la forme
$y' - ay = 0$.
On détermine la solution générale de l'équation obtenue : les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$.
On écrit que $f(0) = 1$ d'où $f : x \mapsto e^{ax}$.
Par exemple, pour $-2y' + 5y = 0$, on écrit
$y' - \frac{5}{2}y = 0$
d'où $f : x \mapsto e^{\frac{5}{2}x}$.

EXERCICE 8

On vérifie que, pour tout x réel :
$w'(x) - w(x) = x + 1$
$t'(x) - t(x) = x + 1$.

EXERCICE 9

Solution générale de l'équation $y' - y = 0$:
les fonctions $x \mapsto k\,e^{x}$.
Solution particulière de (E) : w définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -x - 2$
d'où la solution générale de E :
les fonctions $x \mapsto k\,e^{x} - x - 2$.

EXERCICE 10

1. On écrit $y' + \frac{5}{4}y = 0$.

Solutions : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{5}{4}x}$.

2. $u'(0) = -5$ d'où $u : x \mapsto 4\,e^{-\frac{5}{4}x}$.

EXERCICE 11

Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-7t}$.

EXERCICE 12

On écrit $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$,

équation de la forme $q' - aq = 0$ avec
$a = -\frac{1}{RC}$.

Solution générale : les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{t}{RC}}$.

EXERCICE 13

1. On obtient l'équation caractéristique
$r^2 + r - 2 = 0$.
Cette équation a deux solutions réelles distinctes : 1 et -2
d'où la solution générale de l'équation différentielle : les fonctions $x \mapsto A\,e^x + B\,e^{-2x}$
A et B réels.

2. On obtient le système :

$\begin{cases} A+B=5 \\ A-2B=2 \end{cases}$ d'où $B=1$ et $A=4$.

On obtient alors $u : x \mapsto 4\,e^x + e^{-2x}$.

EXERCICE 14

1. On obtient l'équation caractéristique
$r^2 - 2r + 5 = 0$
$\Delta < 0$, cette équation n'a pas de solutions réelles d'où la solution générale de l'équation différentielle :
$x \mapsto e^x (A \cos(2x) + B \sin(2x))$; A et B réels.

2. Si $h(x) = e^x (A(\cos 2x) + B \sin(2x))$ alors
$h'(x) = e^x ((A + 2B)\cos(2x) + (B - 2A)\sin(2x))$
$h(0) = 1$ conduit à $A = 1$
$h'(0) = 1$ conduit à $A + 2B = 1$ d'où $B = 0$.
On obtient alors $h : x \mapsto e^x \cos(2x)$.

PROBLÈME 2

1. Si $f(x) = a \cos x + b \sin x$ alors
$f(x) + f'(x) = (a + b)\cos x + (b + a)\sin x$.
On a, pour tout x réel, $f'(x) + f(x) = \sin x$, si et seulement si

$\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1 \end{cases}$ d'où $b = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$.

La solution particulière est la fonction
$x \mapsto \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

2. Solution générale : les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k\,e^{-x}$; k réel quelconque.

3. Solution générale de (E) : les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$x \mapsto k\,e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

4. Si $g(x) = k\,e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ alors
$g(0) = k - \frac{1}{2}$.
Si $g(0) = 1$ alors $k = \frac{3}{2}$
d'où la solution demandée : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

PROBLÈME 3

1. Si $q_1(t) = \text{CE}$ alors $q_1'(t) = 0$.
On a, pour tout t réel, $q_1'(t) + q_1(t) = \frac{\text{E}}{\text{R}}$; la fonction $q_1 : t \mapsto \text{CE}$ est une solution particulière de l'équation (1).

2. Solution générale de l'équation
$q' + \frac{1}{\text{RC}}\,q = 0$: les fonctions q définies par
$t \mapsto k\,e^{-\frac{t}{\text{RC}}}$; k constante réelle quelconque.

3. Solution générale de l'équation (1) : les fonctions $t \mapsto k\,e^{-\frac{t}{\text{RC}}} + \text{CE}$; k réel quelconque.
Si $q(t) = k\,e^{-\frac{t}{\text{RC}}} + \text{CE}$, alors $q(0) = 0$ équivaut à $k + \text{CE} = 0$
d'où $k = -\text{CE}$.
La solution particulière demandée est la fonction $t \mapsto \text{CE}\left(1 - e^{-\frac{t}{\text{RC}}}\right)$.

PROBLÈME 4

1. Solution générale : les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$x \mapsto C\,e^{-kx}$; C constante réelle quelconque.

2. $[A]_t = C\,e^{-kt}$; $[A]_0 = C$ d'où $C = 0{,}1$
donc $[A]_t = 0{,}1\,e^{-kt}$.

3. On a $0{,}09 = 0{,}1\,e^{-k(500)}$ soit $0{,}9 = e^{-k(500)}$
d'où $-k(500) = \ln 0{,}9$ et $k = -\frac{\ln 0{,}9}{500}$;
$k \approx 21 \cdot 10^{-5}$.

4. On obtient : $0{,}1\,e^{-21 \cdot 10^{-5} t} < 0{,}05$ ou encore $e^{-21 \cdot 10^{-5} t} < 0{,}5$
d'où l'inéquation $-21 \cdot 10^{-5}\,t < \ln(0{,}5)$ équivalente à :
$21 \cdot 10^{-5}\,t > -\ln(0{,}5)$ ou à
$t > \frac{(-\ln(0{,}5) \times 10^5)}{21}$
$t > 3\,301$ s.

PROBLÈME 6

1. On obtient : $0{,}05y'' + 20y' + 104y = 100$,
d'où en multipliant par 20 :
$y'' + 400y' + 200\,000y = 2\,000$.

2. a L'équation caractéristique
$r^2 + 400r + 200\,000 = 0$ a pour discriminant
$\Delta = (400)^2 - 4 \times 200\,000$; $\Delta = -640\,000$.
Elle n'a pas de solutions réelles.
Solution générale de (2) : les fonctions
$x \mapsto e^{-200x}(A \cos(400x) + B \sin(400x))$
A et B réels.
b Solution particulière de (1) : $x \mapsto 100$.
c Solution générale de (1) : $x \mapsto e^{-200x}$
$[A \cos(400x) + B \sin(400x)] + 100$.

3. Pour $t \geqslant 0$, on a
$q(t) = e^{-200t}[A\cos(400t) + B\sin(400t)] + 100$
avec $q(0) = 0$ et $q'(0) = 0$
$q'(t) = -200\,e^{-200t}[(A - 2B)\cos(400t) + (2A + B)\sin(400t)]$
$q(0) = 0$ conduit à $A = -100$
$q'(0) = 0$ conduit à $B = \frac{1}{2}A$ soit $B = -50$
on obtient :
$q(t) = -50\,e^{-200t}[2\cos(400t) + \sin(400t)] + 100$
$i(t) = q'(t) = 50\,000\,e^{-200t} \times \sin(400t)$.

5 SIGNAUX PÉRIODIQUES

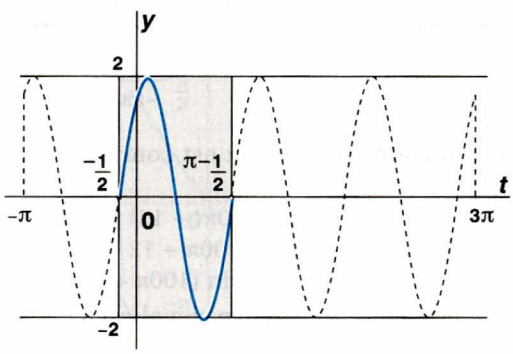
EXERCICE 1

1. $\omega = 2$, donc la période fondamentale T est égale à $\frac{2\pi}{\omega}$ soit π. $\boxed{T = \pi}$.

2. L'intervalle d'étude est $[-1/2\,;\pi - 1/2]$.

t	$-1/2$	$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$	$\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$	$\pi - 1/2$
$2t + 1$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(2t + 1)$	↗	↘	↗	↘	
$2\sin(2t + 1)$	↗	↘	↗	↘	

3. L'intervalle $[T\,;3T]$ est l'intervalle $[-\pi\,;3\pi]$.



EXERCICE 2

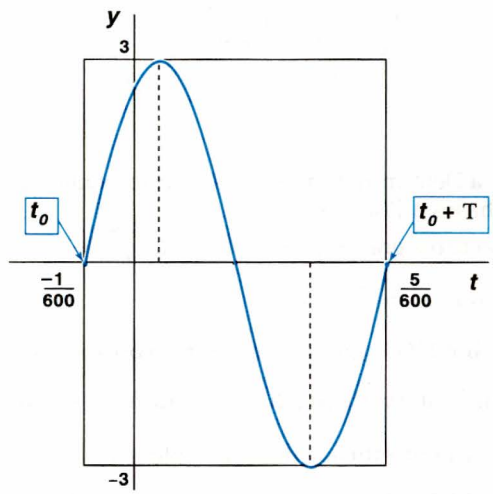
1. $t_0 = -\frac{1}{600}$ **2.** $T = \frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100}$

3.

t	$-\frac{1}{600}$	$\frac{0,5}{600}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{3,5}{600}$	$\frac{5}{600}$
$200\pi t + \pi/3$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(200\pi t \pi/3)$	↗	↘	↗	↘	
$3\sin(200\pi t \pi/3)$	↗	↘	↗	↘	

Remarques

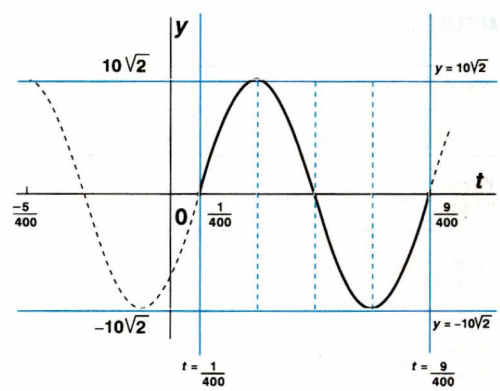
- $t_0 = -\frac{1}{600}$
- $t_0 + T = -\frac{1}{600} + \frac{1}{100} = \frac{5}{600}$



EXERCICE 3

1. $t_0 = \frac{1}{400}$. **2.** $\omega = 100\pi$ $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$

3. $a = 10\sqrt{2}$.



EXERCICE 4

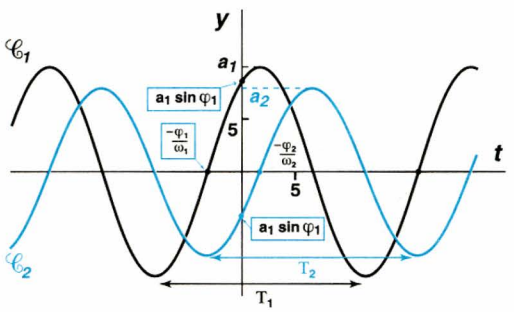
1. Lectures graphiques (notations du cours)

Pour s_1 : $a_1 \approx 10$; $T_1 \approx 20$ d'où $\omega_1 \approx \frac{2\pi}{20}$ soit $\omega_1 \approx \frac{\pi}{10}$

$\frac{-\varphi_1}{\omega_1} < 0$ donc $\varphi_1 > 0$ $\left(\begin{array}{l}\text{on remarque aussi que}\\ a_1 \sin\varphi_1 > 0\end{array}\right)$.

Pour s_2 : $a_2 \approx 8$; $T_2 \approx 20$ d'où $\omega_2 \approx \frac{\pi}{10}$

$\frac{-\varphi_2}{\omega_1} > 0$ donc $\varphi_2 < 0$ $\left(\begin{array}{l}\text{on remarque aussi que}\\ a_2 \sin\varphi_2 < 0\end{array}\right)$.



2. a Détermination de valeurs approchées des phases à l'origine.

Lectures graphiques $\frac{-\varphi_1}{\omega_1} \approx 3{,}3$ $\frac{-\varphi_2}{\omega_2} \approx -1{,}7$.

D'où : $\varphi_1 \approx \frac{\pi}{3}$ et $\varphi_2 \approx -\frac{\pi}{6}$.

2. b c L'énergie moyenne transportée par i_1 sur l'intervalle [0 ; 20] est égale à $\frac{a_1^2}{2}$ soit 50.

La valeur efficace de i est égale à $5\sqrt{2}$.

L'énergie moyenne transportée par i_2 sur l'intervalle [0 ; 20] est égale à $\frac{a_2^2}{2}$ soit 32. La valeur efficace de i_2 est égale à $4\sqrt{2}$.

EXERCICE 5

Signal	s_1	s_2	s_3	s_4
Amplitude	40	$10\sqrt{2}$	2	$100\sqrt{2}$
Période fondam.	$\frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$	$\frac{2\pi}{200\pi} = \frac{1}{100}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Énergie moyenne	$\frac{(40)^2}{2} = 800$	$\frac{(10\sqrt{2})^2}{2} = 100$	$\frac{(2)^2}{2} = 2$	$\frac{(100\sqrt{2})^2}{2} = 10000$
Valeur efficace	$\sqrt{800} = 20\sqrt{2}$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{10\,000} = 100$

EXERCICE 6

$s_0 : t \mapsto \sin(t + \pi/2)$

$s_1 : t \mapsto 4 \sin\left(2t + 3 - \frac{\pi}{2}\right)$

$s_2 : t \mapsto 2 \sin(\pi t - \pi + 1)$

$s_3 : t \mapsto 72 \sin(100\pi t + \pi/3 + \pi/2)$

$s_3 : t \mapsto 72 \sin\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 7

Signal s_1

$s_1(t) = 10 \sin\left(3\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = 10 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$

$s_1(t) = 10 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

La phase à l'origine de ce signal est $\frac{\pi}{2}$.

Signal s_2

$s_2(t) = 127 \sin(100\pi t - 5\pi)$

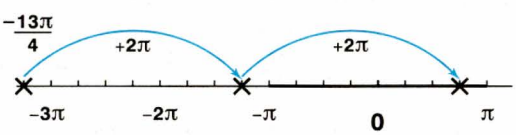
$= 127 \sin(100\pi t - \pi - 4\pi)$

$s_2(t) = 127 \sin(100\pi t - \pi)$.

La phase à l'origine de ce signal est $-\pi$.

Signal s_3

$s_3 = 10\sqrt{2} \sin\left(200\pi t - \frac{13\pi}{4}\right)$

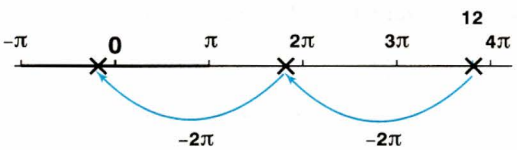


$s_3(t) = 10\sqrt{2} \sin\left(200\pi t - \frac{13\pi}{4} - 4\pi\right)$

$= 10\sqrt{2} \sin\left(200\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$.

La phase à l'origine de ce signal est $\frac{3\pi}{4}$.

Signal s_4



On constate que $12 - 4\pi$ est compris entre $-\pi$ et π.

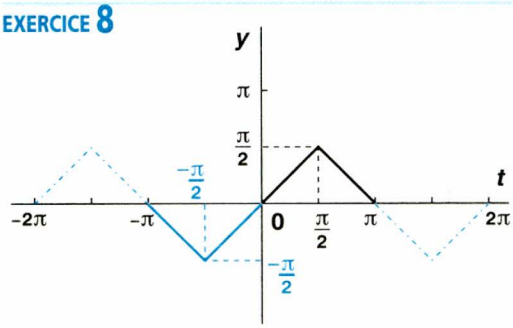
Pour tout t réel, $2 \sin(100\pi t + 12)$

$= 2 \sin(100\pi + 12 - 4\pi + 4\pi)$

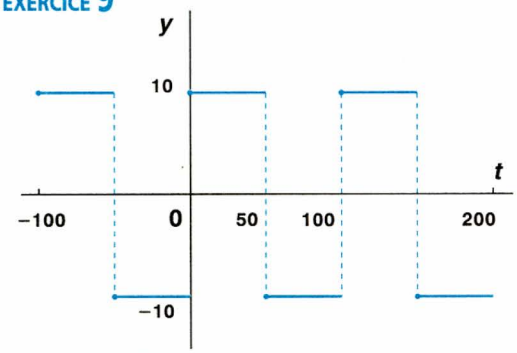
$= 2 \sin(100\pi + 12 - 4\pi)$.

La phase à l'origine de ce signal est $12 - 4\pi$ ($\approx -0{,}57$).

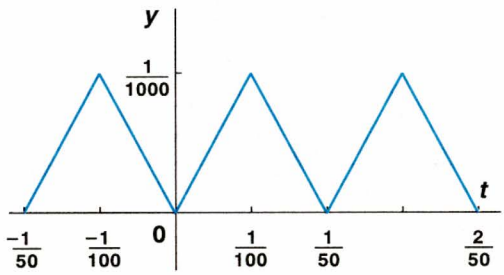
EXERCICE 8



EXERCICE 9



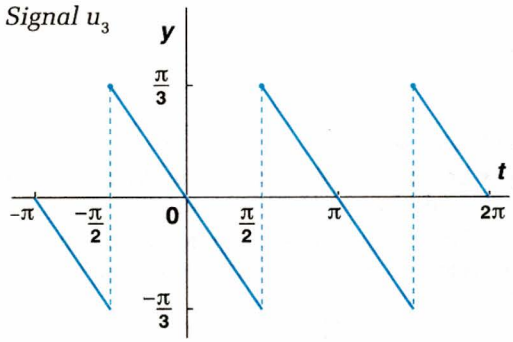
$$\overline{u_1} = \frac{1}{100}\int_0^{100} u_1(t)\,dt = 0$$



$$\overline{u_2} = 50\left(\int_{-1/100}^{0}\left(-\frac{t}{10}\right)dt + \int_0^{1/100}\left(\frac{t}{10}\right)dt\right)$$

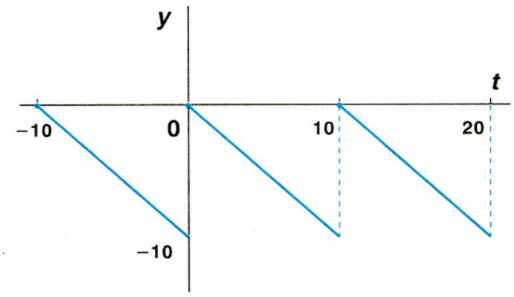
$$= 50\left(\left[\frac{-t^2}{20}\right]_{-1/100}^{0} + \left[\frac{t^2}{20}\right]_0^{1/100}\right) = \frac{1}{2\,000}\ .$$

Signal u_3



$$\overline{u_3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_3(t)\,dt = 0\ .$$

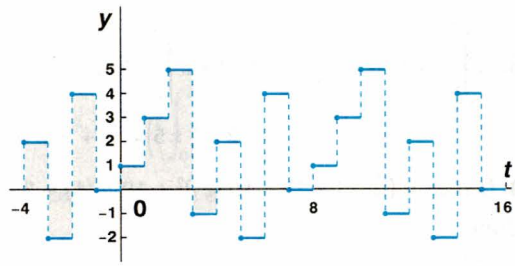
Signal u_4



$$\overline{u_4} = \frac{1}{10}\int_0^{10} -t\,dt = \frac{1}{10}\left[\frac{-t}{2}\right]_0^{10} = -5.$$

EXERCICE 10

1.



2. Par définition : $\overline{u} = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} u(t)\,dt$.

$$\overline{u} = \frac{1}{8}\left[\int_{-4}^{-3} u(t)\,dt + \int_{-3}^{-2} u(t)\,dt + \int_{-2}^{-1} u(t)\,dt + \int_{-1}^{0} u(t)\,dt + \int_{0}^{1} u(t)\,dt + \int_{1}^{2} u(t)\,dt + \int_{2}^{3} u(t)\,dt + \int_{3}^{4} u(t)\,dt\right]$$

d'où

$$\overline{u} = \left[2\int_{-4}^{-3} dt - 2\int_{-3}^{-2} dt + 4\int_{-2}^{-1} dt + 0\int_{-1}^{0} dt + 1\right.$$

$$\overline{u} = \frac{1}{8}\,[2 - 2 + 4 + 0 + 1 + 3 + 5 - 1]$$

$$= \frac{12}{8} = 1{,}5.$$

Par définition : $E_m(u) = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} u((t))^2\,dt$

donc $E_m(u) = \frac{1}{8}\left(4\int_{-4}^{-3} dt + 4\int_{-4}^{-3} dt + 16\int_{-3}^{-2} dt\right.$

$\left. +0\int_{-1}^{0} dt + 1\int_{0}^{1} dt + 9\int_{1}^{2} dt + 25\int_{2}^{3} dt + 1\int_{3}^{4} dt\right) = \frac{1}{8}$

$(4 + 4 + 16 + 0 + 1 + 9 + 25 + 1) = 7{,}5.$

PROBLÈME 2

1. Pour tout réel t,

$s(t+1/2) = 4\sin(4\pi(t+1/2)+10) + 5$

d'où $s(t+1/2) = 4\sin(4\pi t + 2\pi + 10) + 5$

$= 4\sin(4\pi t + 20) + 5 = s(t)$

2. Le signal u admet $1/2$ comme période $\left(T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\right)$.

A n'est autre que l'énergie moyenne transportée par u sur l'intervalle $[0\,;1/2]$ et B la valeur moyenne de u sur l'intervalle $[0\,;1/2]$

donc $A = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$ et $B = 0$.

3. $2\int_0^{1/2} s(t)\,dt = 2\int_0^{1/2} u(t)\,dt + 2\int_0^{1/2} 5\,dt = B$

$+ \left(2 \times \frac{1}{2} \times 5\right) = B + 5 = 5.$

4. $(s(t))^2 = (u(t) + 5)^2 = (u(t))^2 + 10\,u(t) + 25$

donc

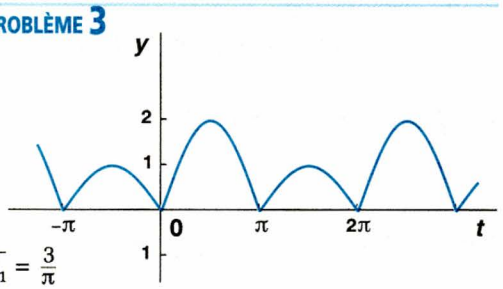
$2\int_0^{1/2} (s(t))^2\,dt = 2\int_0^{1/2} (u(t))^2\,dt +$

$2\int_0^{1/2} 10(u(t))\,dt + 2\int_0^{1/2} 25\,dt$

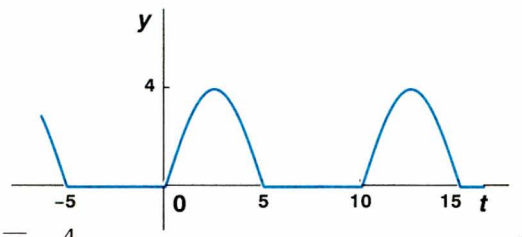
$2\int_0^{1/2} (s(t))^2\,dt = A + 10B + 25 = A + 25$

$V_{eff}(s) = \sqrt{2\int_0^{1/2} (s(t))^2\,dt} = \sqrt{8+25} = \sqrt{33}$.

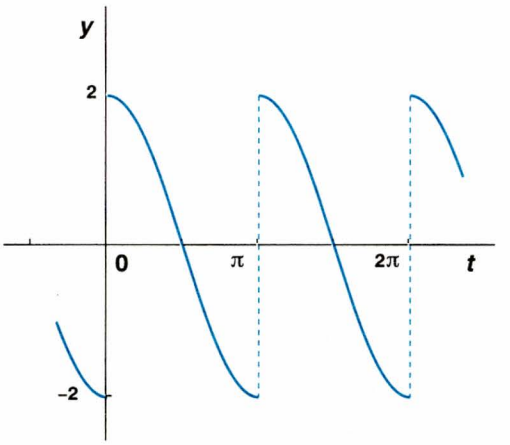
PROBLÈME 3



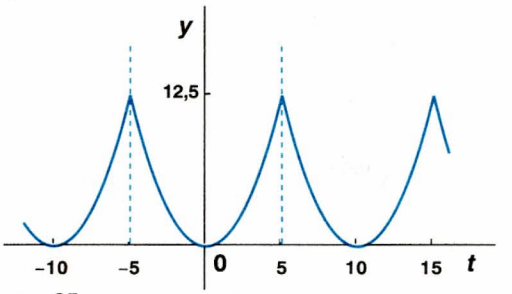
$\overline{v_1} = \frac{3}{\pi}$



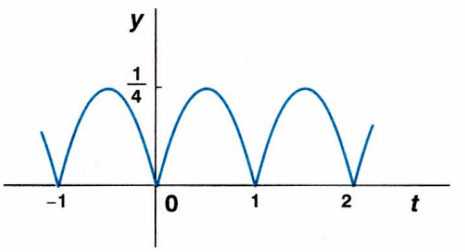
$\overline{v_2} = \frac{4}{\pi}$



$\overline{v_3} = 0$



$\overline{v_u} = \frac{25}{6}$



$\overline{v_s} = 1/6$

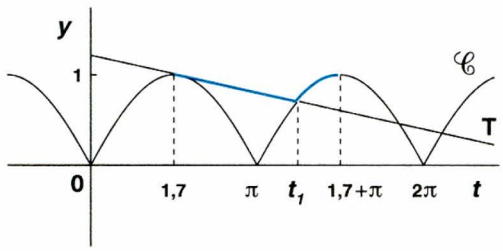
PROBLÈME 4

1. • Le nombre dérivé de la fonction sinus en 1,7 est égal à $\cos(1{,}7)$ ($\approx -0{,}13$).

• Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus en son point d'abscisse 1,7 est :

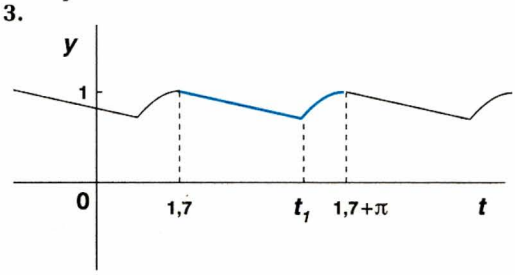
$y = (t - 1{,}7) \cdot \cos(1{,}7) + \sin(1{,}7)$.

2. a (On constate que T n'est autre que la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1,7.)



2. b $t_1 \approx 3{,}9$.

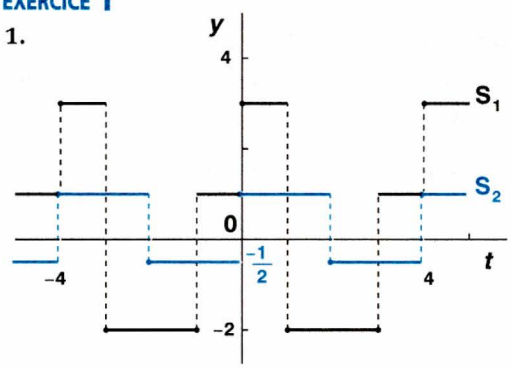
3.

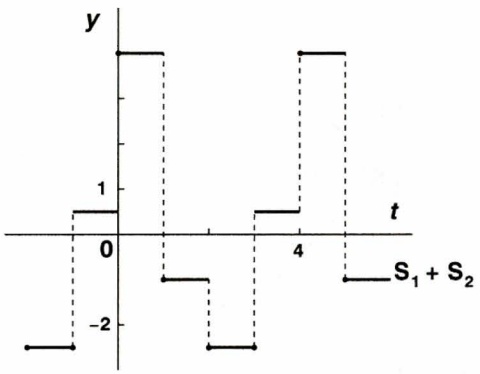


6 SOMME DE SIGNAUX PÉRIODIQUES

EXERCICE 1

1.





2. $\overline{s_1} = \frac{1}{4}\int_0^4 s_1(t)\,dt = \frac{1}{4}$

$$\left[\int_0^1 s_1(t)\,dt + \int_1^3 s_1(t)\,dt + \int_3^4 s_1(t)\,dt\right]$$

$\overline{s_1} = \frac{1}{4}(3 - 4 + 1) = 0.$

$\overline{s_2} = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 1\,dt + \int_2^4 -\frac{1}{2}\,dt\right) = \frac{1}{4}(2 - 1)$

$= \frac{1}{4}$.

3. $\overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

4. $E_m(s_1) = \frac{1}{4}\int_0^4 (s_1(t))^2\,dt$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 9\,dt + \int_1^3 4\,dt + \int_3^4 1\,dt\right)$$

- $E_m(s_1) = \frac{1}{4}(9 + 8 + 1) = \frac{9}{2}$
- $E_m(s_2) = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 1\,dt + \int_2^4 \frac{1}{4}\,dt\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$.

On constate que, en posant $s = s_1 + s_2$,

$$\begin{cases} s(t) = 4 & \text{pour } 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) = -1 & \text{pour } 1 \leqslant t < 2 \\ s(t) = -5/2 & \text{pour } 2 \leqslant t \leqslant 3 \\ s(t) = \frac{1}{2} & \text{pour } 3 < t < 4 \end{cases}$$

d'où

$E_m(s_1 + s_2)$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 16\,dt + \int_1^2 1\,dt + \int_2^3 \frac{25}{4}\,dt + \int_3^4 \frac{1}{4}\,dt\right)$$

$E_m(s_1 + s_2) = \frac{1}{4}\left(16 + 1 + \frac{25}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{94}{16} = \frac{47}{8}$

$E_m(s_1) + E_m(s_2) = \frac{9}{2} + \frac{5}{8} = \frac{41}{8} \neq E_m(s_1) + E_m(s_2)$

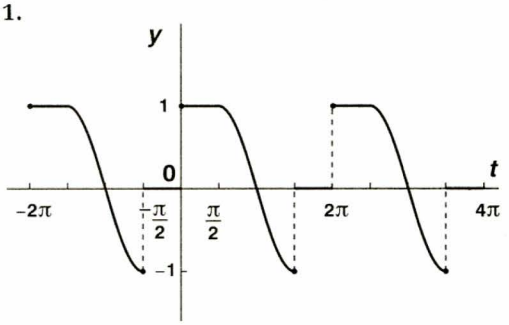
5. $V_{eff}(s_1) = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$V_{eff}(s_2) = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$V_{eff}(s_1 + s_2) = \sqrt{\frac{47}{8}} = \frac{\sqrt{47}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{94}}{4}$.

EXERCICE 2

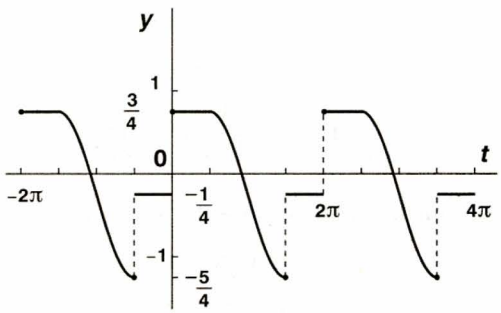
1.



2. $V_m(S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\,dt =$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t\,dt\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + [-\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

3. $u : t \mapsto s(t) - \frac{1}{4}$



4. $\left(\overline{u} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(s(t) - \frac{1}{4}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\,dt - \frac{1}{4} = 0\right)$

EXERCICE 3

1. s' est définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 6\cos(3t + \pi/3)$

[si $f(t) = \sin(at + b)$ alors
$f'(t) = a\cos(at + b)$]

d'où $s' : t \mapsto 6\sin(3t + \pi/3 + \pi/2)$

soit $s' : t \mapsto 6\sin(3t + 5\pi/6)$.

Période de s et de s' (période fondamentale) : $\frac{2\pi}{3}$

Amplitude de s : 2 ; amplitude de s' : 6

Phase à l'origine de s : $\pi/3$;

phase à l'origine de s' : $5\pi/6$.

2. a *Représentation de Fresnel*

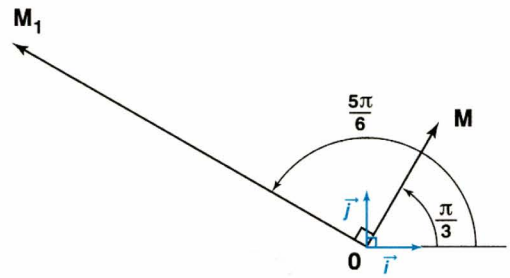
• À s on associe le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = 2 \\ \text{mesure principale, en radian, de } \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

• À s' on associe le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ tel que

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| = 6 \\ \text{mesure principale, en radian, de } \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$\left(\text{rappel } \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$.



repère orthonormal
$(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

b *Représentation en nombres complexes*

• À s on associe le nombre complexe z tel que
$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

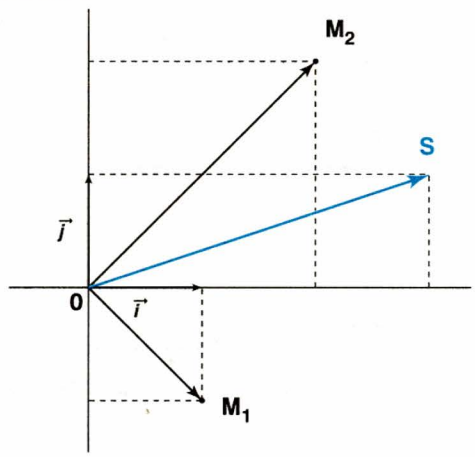
ou encore $z = 1 + j\sqrt{3}$.

• À s' on associe le nombre complexe z' tel que
$z' = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

ou encore $z' = -3\sqrt{3} + j3$.

EXERCICE 4

1.



[diagramme 1]

2. a. • $|\overrightarrow{OM_1}| = \sqrt{2}$; $|\overrightarrow{OM_2}| = 2\sqrt{2}$

• mesure principale, en radian, de $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM_1}) = -\pi/4$.

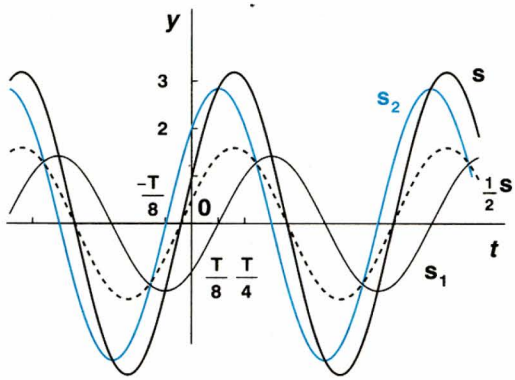
• mesure principale, en radian, de $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM_2}) = \pi/4$.

b. Voir diagramme 2.

3. a. Voir diagramme 1.

b. s_1 défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \sqrt{2}\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \pi/4\right)$.

s_2 défini sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 2\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \pi/4\right)$.



[diagramme 2]

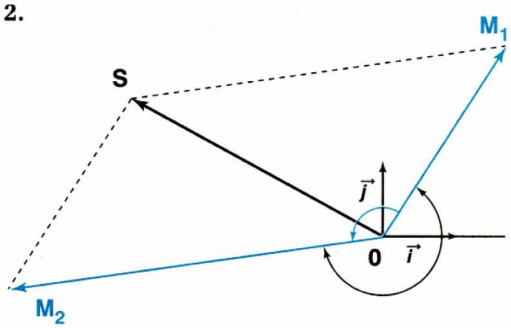
c. $s(t) = \sqrt{10}\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$

avec $\varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ soit encore $\varphi_0 \approx 0{,}32$.

EXERCICE 5

1. Les deux signaux sinusoïdaux s_1 et s_2 ont même pulsation ($\omega = 2$).
Ils ont donc même période fondamentale π.
Le signal s est donc un signal sinusoïdal de période fondamentale π.

2.



$\overrightarrow{OM_1}$ est associé à s_1 ; $\overrightarrow{OM_2}$ à s_2 et $\overrightarrow{OS}$ à s.
Une lecture graphique donne pour l'amplitude 3,8 et 2,6 pour la phase à l'origine.

3. Le nombre complexe z_1 associé à s_1 est $3(\cos 1 + j \sin 1)$.
Le nombre complexe z_2 associé à s_2 est $5(\cos(-3) + j \sin(-3))$.
Le nombre complexe associé à $s_1 + s_2$ est le nombre complexe z tel que $z = z_1 + z_2$.
Soit $z = 3\cos 1 + 5\cos 3 + j(3\sin 1 - 5\sin 3)$.

4. a. *Méthode des nombres complexes*
L'amplitude de s est égale à $|z|$. D'où :
$|z|^2 = (3\cos 1 + 5\cos 3)^2 + (3\sin 1 - 5\sin 3)^2$
$|z|^2 = 9 + 25 + 30(\cos 1 \cos 3 - \sin 1 \sin 3)$.
$|z|^2 = 34 + 30\cos(1+3) = 34 + 30\cos(4)$
et $|z| = \sqrt{34 + 30\cos 4}$.
La valeur arrondie à 10^{-2} est : 3,79.

b. *Méthode utilisant la représentation de Fresnel*
$\|\overrightarrow{OS}\|^2 = \|\overrightarrow{OM_1}\|^2 + \|\overrightarrow{M_1S}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OM_1}\| \|\overrightarrow{M_1S}\| \cos(\overrightarrow{M_1O}, \overrightarrow{M_1S})$
$\|\overrightarrow{OS}\|^2 = 34 - 30\cos(\pi - 4) = 34 + 30\cos 4$.

5. La phase à l'origine de z, soit φ est telle que :

$$\begin{cases} -\pi \leqslant \varphi < \pi \\ \cos\varphi = \dfrac{\text{Re}\,z}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{\text{Im}\,z}{|z|} \end{cases}$$

Donc $\tan\varphi = \dfrac{\text{Im}\,z}{\text{Re}\,z} = \dfrac{3\sin 1 - 5\sin 3}{3\cos 1 + 5\cos 3}$.

On constate que
$\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sin 1 - 5\sin 3}{3\cos 1 + 5\cos 3}\right) \approx -0{,}50$.

Le diagramme de Fresnel permet de conclure que la phase à l'origine de s est :
$\tan^{-1}\left(\dfrac{3\sin 1 - 5\sin 3}{3\cos 1 + 5\cos 3}\right) + \pi$.

La valeur arrondie à 10^{-2} de φ est 2,64.

EXERCICE 6

1. $u_1 + u_2 : t \mapsto 2\sqrt{37}\ \sin(100\pi t + \varphi_0)$
avec $\varphi_0 \approx -0{,}62$.

2. $u_1 + u_2 : t \mapsto 20\sin(100\pi t)$.

3. $u_1 + u_2 : t \mapsto 50\sqrt{13}\ \sin(200\pi t + \varphi_0)$
avec $\varphi_0 \approx 0{,}06$.

EXERCICE 7

1. $s_1 : t \mapsto 4\sin(\omega t)$ $s_2 : t \mapsto 6\sin(\omega t - \pi/2)$.

Période fondamentale de s_1 : $\frac{2\pi}{\omega}$; de s_2 : $\frac{2\pi}{\omega}$.

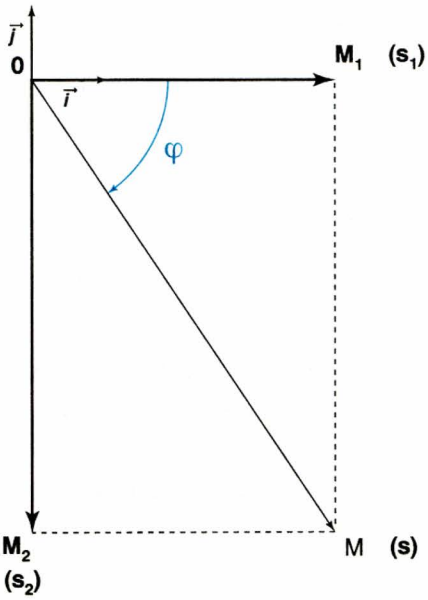
Amplitude de s_1 : 4 ; de s_2 : 6.

Phase à l'origine de s_1 : 0 ; de s_2 : $-\frac{\pi}{2}$.

2. $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

3. 4. *Représentations*

• *Fresnel*



• *En nombres complexes :*

s_1 est associé à z_1 tel que $z_1 = 4$

s_2 est associé à z_2 tel que $z_2 = -6j$

s est associé à $z_1 + z_2$ soit $z_1 + z_2 = 4 - 6j$.

5. Calculs

• *Par Fresnel :*

$\| \overrightarrow{OM} \|^2 = 4^2 + 6^2 = 52$

donc $\| \overrightarrow{OM} \| = 2\sqrt{13}$.

• *Par les nombres complexes :*

$|z_1 + z_2|^2 = 4^2 + 6^2 = 52$

$|z_1 + z_2| = 2\sqrt{13}$.

Donc s est de la forme $t \mapsto 2\sqrt{13} \sin(\omega t + \varphi_0)$.

D'où pour tout t réel

$-2\sqrt{13} \leqslant s(t) \leqslant 2\sqrt{13}$.

Comme $2\sqrt{13} \leqslant 7{,}3$,

il vient $-7{,}3 \leqslant s(t) \leqslant 7{,}3$.

[Remarque : dans ce cas particulier l'amplitude peut se calculer directement ; il s'agit en effet de l'écriture en sinus et cosinus d'un signal sinusoïdal.]

EXERCICE 8

1. $s(0) = 2$.

$s' : t \mapsto -6 \sin(3t) + 9 \cos(3t)$

$s'(0) = 9$.

2. $s'' : t \mapsto -18 \cos(3t) - 27 \sin(3t)$

donc pour tout t réel $s''(t) + 9s(t) = 0$.

3. L'amplitude de s est égale à $\sqrt{4+9}$ soit à $\sqrt{13}$.

La valeur efficace est $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$ ou encore $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

(il s'agit d'un signal sinusoïdal écrit en sinus et cosinus).

4. La phase à l'origine φ est telle que :

$-\pi < \varphi \leqslant \pi$ et $\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$

donc $\tan\varphi = \frac{2}{3}$

$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0{,}59$

d'où en tenant compte du signe de $\sin\varphi$, on peut écrire que la phase à l'origine de s est égale exactement à $\tan^{-1}(2/3)$; sa valeur arrondie à 10^{-2} est 0,59.

EXERCICE 9

1. Pour s_1 la période fondamentale est $\frac{2\pi}{100\pi}$ soit $\frac{1}{50}$

pour s_2 la période fondamentale est $\frac{2\pi}{200\pi}$ soit $\frac{1}{100}$.

2. $s\left(t+\frac{1}{50}\right) = 12 \sin\left(100\pi\left(t+\frac{1}{50}\right)-2\right) - 4 \sin\left(200\pi\left(t+\frac{1}{50}\right)+1\right)$

$s\left(t+\frac{1}{50}\right) = 12 \sin(100\pi t + 2\pi - 2) - 4 \sin(200\pi t + 4\pi + 1)$

$s\left(t+\frac{1}{50}\right) = 12 \sin(100\pi t - 2) - 4 \sin(200\pi t - 1)$.

Donc $1/50$ est une période non nulle de s.

Ce résultat était prévisible car $\frac{1}{50}$ est une période de s_1 et de s_2.

3. $\overline{s} = 50 \int_0^{1/50} s(t)\,dt$

$= 50 \left(\int_0^{1/50} s_1(t)\,dt + \int_0^{1/50} s_2(t)\,dt \right)$.

Or : $\frac{1}{50}$ est une période de s_1, donc

$50 \int_0^{1/50} s_1(t)\,dt = \overline{s_1}$

et $\frac{1}{50}$ est aussi une période de s_2, donc

$50 \int_0^{1/50} s_2(t)\,dt = \overline{s_2}$.

Comme la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal sur une période non nulle est égale à 0, on obtient :

$\overline{s} = \overline{s_1} + \overline{s_2} = 0$.

PROBLÈME 1

1. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

$= \dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-[\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta]}{2}$

$\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} = \sin\alpha\sin\beta.$

2. a. $p(t) = 50\cdot\sin(100\pi t)\cdot\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$

$p(t) = \dfrac{50}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= 25\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right).$

b. $p(t) = 25\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 25\cos\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$

$= 25\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 25\sin\left(200\pi t+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$

$= 25\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 25\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{4}\right).$

c. La période fondamentale de $t \mapsto 25\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$ est égale à $\dfrac{2\pi}{200\pi}$ soit $\dfrac{1}{100}$. C'est aussi la période fondamentale de p.

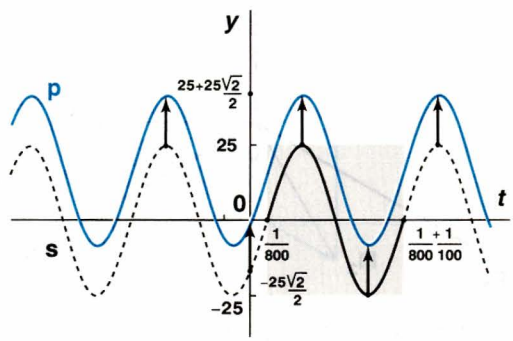
Par définition :

$$\overline{p} = 100\int_0^{\frac{1}{100}}\left(25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+25\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt$$

$$\overline{p} = 100\int_0^{\frac{1}{100}} 25\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot dt + \underbrace{100\int_0^{\frac{1}{100}} 25\cdot\sin\left(200\pi t-\frac{\pi}{4}\right)dt}_{=0}$$

$$\overline{p} = 2\,500\,\frac{\sqrt{2}}{2}[t]_0^{\frac{1}{100}} = 25\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d. $p(0) = 0$; $S(0) = -25\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



3. a. $p(t) = a_1 a_2\,[\sin(\omega t)\sin(\omega t+\varphi)]$

$= \dfrac{a_1 a_2}{2}\,[\cos\varphi - \cos(2\omega t+\varphi)].$

b. $T = \dfrac{2\omega}{2\pi} = \dfrac{\omega}{\pi}$.

c.

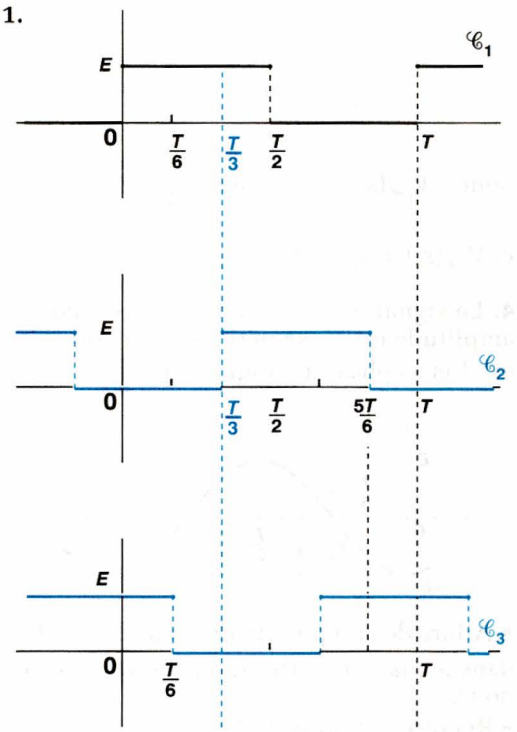
$$\overline{p} = \frac{\pi}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{a_1 a_2}{2}\cdot(\cos\varphi-\cos(2\omega t+\varphi))\,dt$$

$$= \frac{a_1 a_2\,\omega}{2\pi}\cos\varphi\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} dt$$

$$= \frac{a_1 a_2\,\omega}{2\pi}\times\frac{\pi}{\omega}\cos\varphi = \frac{a_1 a_2}{2}\cos\varphi.$$

PROBLÈME 2

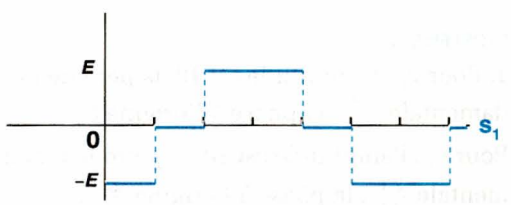
1.

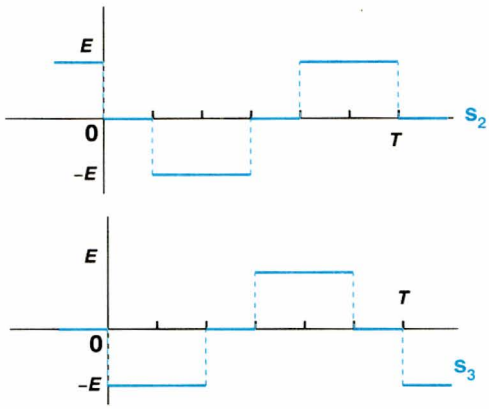


L'image de $\mathscr{C}_3$ par la translation $\dfrac{T}{3}\vec{i}$ est $\mathscr{C}_1$.

2. u_2 et u_3 sont périodiques de période T.

3. a.





b. Par définition :

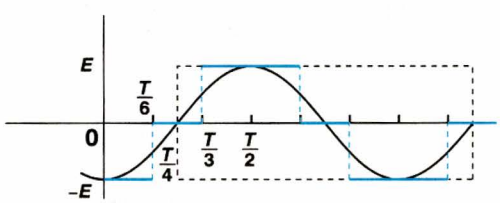
$$V_{eff}(s_1) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (s_1(t))^2 \, dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{T/6} E^2\,dt + \int_{\frac{2T}{6}}^{\frac{4T}{6}} E^2\,dt + \int_{\frac{5T}{6}}^{T} E^2\,dt\right]}$$

donc $V_{eff}(s_1) = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot 4E^2\cdot\frac{T}{6}} = E\sqrt{\frac{2}{3}}$.

c. $V_{eff}(s_2) = V_{eff}(s_3) = E\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Le signal w est un signal sinusoïdal son amplitude est E ; sa période (fondamentale) est T et sa phase à l'origine est $-\frac{\pi}{2}$.



• Allure de la représentation graphique de ω dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (en noir).

• Représentation graphique de s_1 (en bleu).

$V_{eff}(w) = \frac{E}{\sqrt{2}}$

donc $\frac{V_{eff}(s_1)}{V_{eff}(w)} = \frac{E\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{E} = \sqrt{\frac{4}{3}} \simeq 1{,}15$.

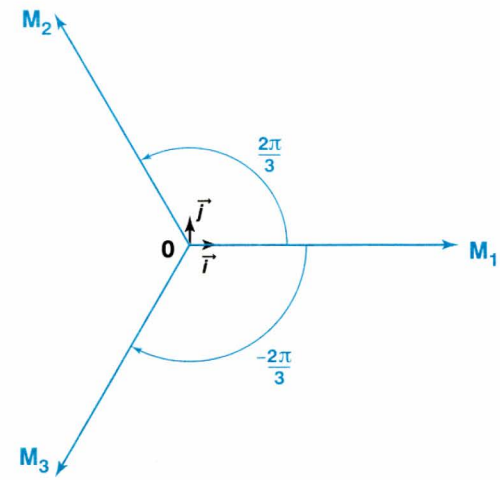
PROBLÈME 3

1. Pour v_1 : l'amplitude est 10, la période fondamentale $\frac{2\pi}{\omega}$, la phase à l'origine 0.

Pour v_2 : l'amplitude est 10, la période fondamentale $\frac{2\pi}{\omega}$, la phase à l'origine $\frac{2\pi}{3}$.

Pour v_3 : l'amplitude est 10, la période fondamentale $\frac{2\pi}{\omega}$, la phase à l'origine $-\frac{2\pi}{3}$.

2.



$\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} \text{ représente } v_1 \\ \overrightarrow{OM_2} \text{ représente } v_2 \\ \overrightarrow{OM_3} \text{ représente } v_3 \end{cases}$

$M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral.

3. v_1 est représenté par le nombre complexe z_1 tel que $z_1 = 10$

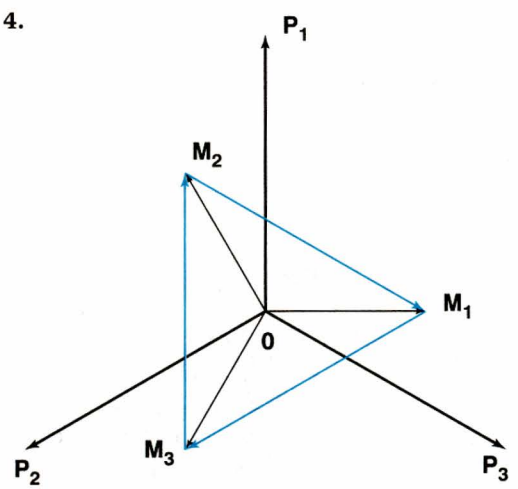
v_2 est représenté par le nombre complexe z_2 tel que $z_2 = 10\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

soit $z_2 = -5 + j\,5\sqrt{3}$

v_3 est représenté par le nombre complexe z_3 tel que $z_3 = 10\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

soit $z_3 = -5 - j\,5\sqrt{3}$.

4.



$\overrightarrow{OP_1}$ représente $v_2 - v_3$ soit u_{23}

$\overrightarrow{OP_2}$ représente $v_3 - v_1$ soit u_{31}
$\overrightarrow{OP_3}$ représente $v_1 - v_2$ soit u_{12}
donc $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_3}$; $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1}$; $\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$
soit $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{M_3M_2}$; $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{M_2M_1}$.

5. $\| \overrightarrow{M_1M_2} \| = \| \overrightarrow{M_1M_3} \| = \| \overrightarrow{M_2M_3} \|$.
Dans le triangle OM_1M_2 :

$$\| \overrightarrow{M_1M_2} \|^2 = \| \overrightarrow{OM_1} \|^2 + \| \overrightarrow{OM_2} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{OM_1} \| \cdot \| \overrightarrow{OM_2} \| \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

d'où

$$\| \overrightarrow{M_1M_2} \| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2 - \left(100 \times \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

donc $\| \overrightarrow{OP_1} \| = \| \overrightarrow{OP_2} \| = \| \overrightarrow{OP_3} \| = 10\sqrt{3}$.
L'amplitude des signaux u_{12}, u_{23} et u_{31} est $10\sqrt{3}$.
(En utilisant la représentation par les nombres complexes. Le signal u_{23} est égal à $v_2 - v_3$ et est représenté par $z_2 - z_2$
c'est-à-dire $(-5 + j5\sqrt{3}) - (-5 - j\sqrt{3})$ soit $j \cdot 10\sqrt{3}$ dont le module est $0\sqrt{3}$, etc.)

6. $u_{23}(t) = 10 \cdot \sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$u_{31}(t) = 10 \cdot \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$

$u_{12}(t) = 10 \cdot \sqrt{3} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$.

7

APPROXIMATION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

EXERCICE 1

1. On vérifie que pour tout t réel
$s\left(t + \frac{1}{50}\right) = s(t)$.

2. $\overline{s} = \sqrt{2}$.

3. $E_m(s) \approx 5{,}57$.

EXERCICE 2

1. Pour tout t réel,

$$f(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1 - \cos(4\pi t)}{2}$$

ou encore

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sin(2\pi t) - \frac{1}{2}\cos(4\pi t)$$

soit $a_0 = \frac{1}{2}$; $a_1 = 0$; $b_1 = 1$; $a_2 = -\frac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

2. Le signal f est périodique de période 1, donc l'énergie moyenne qu'il transporte sur l'intervalle [0 ; 1] est égale à :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{7}{8} .$$

3. L'énergie moyenne transportée par f sur l'intervalle [0 ; 2] est aussi égale à $\frac{7}{8}$.

Soit $\frac{7}{8} = \frac{1}{2}\int_0^2 f^2(t)\,dt$. D'où $\int_0^2 f^2(t)\,dt = \frac{7}{4}$.

EXERCICE 3

1. s_1 a pour période fondamentale $\frac{2\pi}{100\pi}$ soit $\frac{1}{50}$

s_2 a pour période fondamentale $\frac{2\pi}{200\pi}$ soit $\frac{1}{100}$.

$\frac{1}{50}$ est donc une période commune à s_1 et à s_2. C'est donc aussi une période de leur somme $s_1 + s_2$. ($s_1 + s_2$ n'est pas le signal nul).

2. $E_m(s_1) = \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 4$; $E_m(s_2) = \frac{(2\sqrt{3})^2}{2} = 6$.

3. $(s_1 + s_2)(t) = s_1(t) + s_2(t) =$
$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin(100\pi t) +$
$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(100\pi t) +$
$2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(200\pi t) +$
$2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(200\pi t) = \sqrt{2}\sin(100\pi t) +$
$\sqrt{6} \cdot \cos(100\pi t) + \sqrt{6}\sin(200\pi t) +$
$\sqrt{6}\cos(200\pi t)$.

4. $E_m(s_1 + s_2) = \frac{1}{2}(2 + 18) = 10$

ce qui peut encore s'obtenir par :

$$E_m(s_1 + s_2) = \left(\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 10\right) .$$

Donc $E_m(s_1 + s_2) = E_m(s_1) + E_m(s_2)$.

EXERCICE 4

1. u est la somme de deux signaux sinusoïdaux de période fondamentale $\frac{2\pi}{100\pi}$,

soit $\frac{1}{50}$. Donc u est un signal sinusoïdal de période fondamentale $\frac{1}{50}$.
(u n'est pas le signal nul.)

2. $E_m(u_1) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4$;

$E_m(u_2) = \frac{1}{2}-\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 6$.

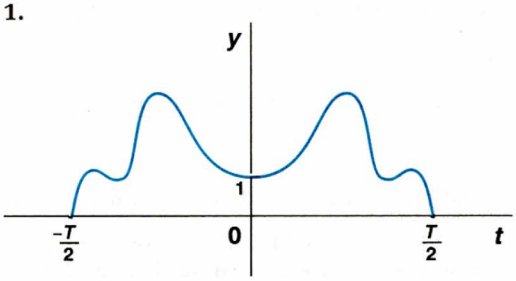
3. $u(t) = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\sin(100\pi t) + 2\sqrt{6}\cos(100\pi t)$

$E_m(u) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2\right] = 2\sqrt{3}+16$.

4. $2\sqrt{3} \neq 10$.

EXERCICE 5

1.



2. $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} s(t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt$

or $\int_{0}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{0} s(t)\,dt$

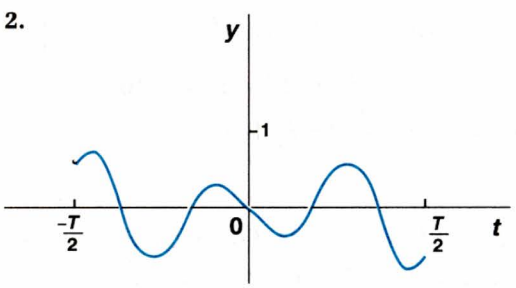
(interprétation graphique de l'intégrale)

d'où : $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = 2\times\frac{3T}{4} = \frac{3T}{2}$.

EXERCICE 6

1. $u(-0) = -u(0)$ donc $u(0) = -u(0)$ d'où $u(0) = 0$.

2.



La courbe obtenue admet l'origine pour centre de symétrie.
Le signal est impair ; on obtient, d'après une remarque donnée au paragraphe 2.b page 95 on a :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,dt = 0 .$$

EXERCICE 7

1. $s(t+1) = (1+\cos(2\pi(t+1)))^2$
$= (1+\cos(2\pi t + 2\pi))^2$
$= (1+\cos(2\pi t))^2$.

2. $a_0 = 3/2$; $a_1 = 2$; $b_1 = 0$; $a_2 = \frac{1}{2}$;
$b_2 = 0$; $a_3 = b_3 = a_4 = b_4 = a_5 = b_5 = 0$.
Non, il pourrait y avoir des coefficients de Fourier de rang supérieur à 5 non nuls.

3. $(1+\cos(2\pi t))^2 = 1 + 2\cos(2\pi t) + (\cos(2\pi t))^2$

$(1+\cos(2\pi t))^2 = 1 + 2\cos(2\pi t) + \frac{1+\cos(4\pi t)}{2}$

$(1+\cos(2\pi t))^2 = \frac{3}{2} + 2\cos(2\pi t) + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)$

(s est un signal polynôme trigonométrique de période 1).

4. En utilisant la relation de Parseval

$$\frac{1}{1}\int_{-0,5}^{0,5}(1+\cos(2\pi t))^4\,dt = \frac{1}{1}\int_{-0,5}^{0,5} s((t))^2\,dt$$
$$= \frac{9}{4}+\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{4}\right) = \frac{35}{8} .$$

EXERCICE 8

1. si $T = \frac{1}{50}$ alors $\omega = \frac{2\pi}{T}$ soit $\omega = 100\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt = 50\int_{-1/50}^{1/50} s(t)\,dt$$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(\omega t)\,dt$$

$$= 100\int_{-1/50}^{1/50} s(t)\cos(100\pi t)\,dt$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(\omega t)\,dt$$

$$= 100\int_{-1/50}^{1/50} s(t)\sin(100\omega t)\,dt$$

$$a_2 = 100\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(200\pi t)\,dt$$

$$b_2 = 100\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(200\pi t)\,dt$$

$$a_3 = 100\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(300\pi t)\,dt$$

$$b_3 = 100\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\sin(300\pi t)\,dt\ .$$

2. $T = \pi/2$ donc $\omega = 4$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\,dt\ ;$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\cdot\cos(4t)\,dt\ ;$$

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\sin(4t)\,dt$$

$$a_2 = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\cos(8t)\,dt\ ;$$

$$b_2 = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\sin(8t)\,dt\ ;$$

$$a_3 = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\cos(12t)\,dt\ ;$$

$$b_3 = \frac{4}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (t^2+3t)\sin(12t)\,dt\ .$$

3. Si $T = \frac{1}{100}$ alors $\omega = 200\pi$. Pour tout t réel.

$$F_3(t) = 1 + 2\sin(200\pi t) - \frac{\pi}{2}\cos(400\pi t) + \frac{1}{2}\sin(400\pi t) + \frac{1}{10}\cos(600\pi t) + \frac{1}{4}\sin(600\pi t).$$

4. Si $T = \pi$ alors $\omega = 2$. Pour tout t réel,

$$F_3(t) = \frac{4}{\pi}\cdot\cos(2t) - \frac{2}{\pi}\sin(2t) - \frac{9}{\pi}\cos(4t) + \frac{2}{\pi}\sin(6t).$$

EXERCICE 9

1. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/4} 2\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} 2\,dt\right)$

$$= \frac{1}{T}\left(\left(2\times\frac{T}{4}\right)+\left(2\times\frac{T}{4}\right)\right) = 1$$

(on peut aussi utiliser l'interprétation graphique de l'intégrale pour calculer $\int_0^T s(t)\,dt$).

2. $a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \frac{4}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_{-T/4}^{T/4}$

$$a_1 = \frac{4}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi T}{4T}\right)-\sin\left(\frac{2\pi(-T)}{4T}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{4}{T}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{4}{T}\times\frac{T}{2\pi}\left[-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\left[-\cos(-\pi/2)+\cos(-\pi/2)\right] = 0\ .$$

EXERCICE 10

1. On obtient :

$F_1 : t \mapsto \frac{4}{\pi}\sin(t)$; $F_2 = F_1$;

$$F_3 : t \mapsto \frac{4}{\pi}\left(\sin(t)+\frac{\sin(3t)}{3}\right)$$

$$F_4 = F_3\ ;\ F_5 : t \mapsto \frac{4}{\pi}\left[\sin(t)+\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{\sin(5t)}{5}\right].$$

2. Pour tout t réel,

$$S(t) = \frac{1}{5}\left[F_1(t)+F_2(t)+F_3(t)+F_4(t)+F_5(t)\right]$$

$$S(t) = \frac{1}{5}\left[\frac{4}{\pi}\sin(t)+\frac{4}{\pi}\sin(t)+\frac{4}{\pi}\sin(t)+\frac{4}{\pi}\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{4}{\pi}\sin(t)+\frac{4}{\pi}\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{4}{\pi}\sin(t)+\frac{4}{\pi}\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{4}{\pi}\frac{\sin(5t)}{5}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin(t)+\frac{\sin(3t)}{5}+\frac{\sin(5t)}{25}\right].$$

3. On pourrait se laisser tenter par la courbe représentative de S !

4. $E_m(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 1$

$$E_m(s) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\times\frac{1}{25}+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\times\frac{1}{(25)^2}\right]$$

$$= \frac{5\,208}{625\pi^2}$$

$$E_m(F_5) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{\pi}\right)^2+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\times\frac{1}{9}+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\times\frac{1}{25}\right]$$

$$= \frac{2\,072}{225\pi^2}\ .$$

5. a. *Vérification immédiate*

b. non.

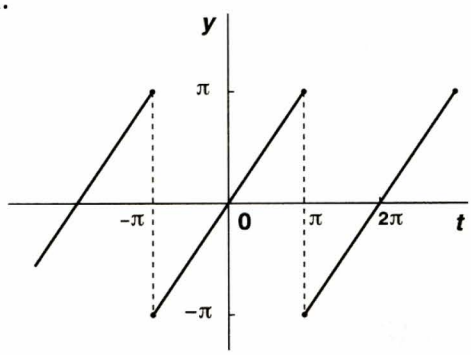
c. $E_m(e_1) - E_m(e) = \dfrac{2\,072}{225\pi^2} - \dfrac{16\,616}{1\,875\pi^2}$.

$= \dfrac{1\,952}{5\,625\pi^2} \geqslant 0$

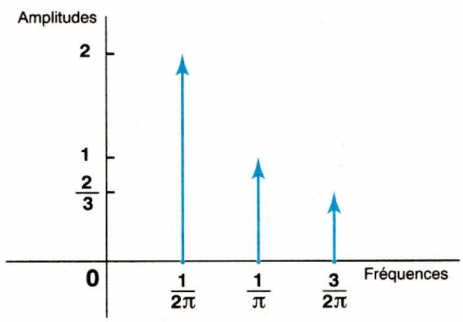
PROBLÈME 1

1er cas

1.



2.



3. $E_m(s) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{\pi^3}{3} + \dfrac{\pi^3}{3}\right] = \dfrac{\pi^2}{3}$

valeur arrondie à 10^{-2} de $E_m(s) = 3{,}29$.

4. $E_m(F_3) = \dfrac{1}{2}\left[4 + 1 + \dfrac{4}{9}\right] = \dfrac{49}{18}$

valeur arrondie à 10^{-2} de $E_m(F_3) = 2{,}72$.

5. $E_m(e) = \dfrac{\pi^2}{3} - \dfrac{49}{18}$;

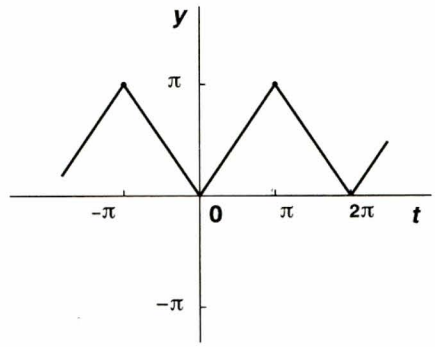
valeur arrondie à 10^{-2} de $E_m(e) = 0{,}57$.

6. $10 \log\left(\dfrac{E_m(s)}{E_m(e)}\right) = 10 \log\left(\dfrac{6\pi^2}{6\pi^2 - 49}\right)$

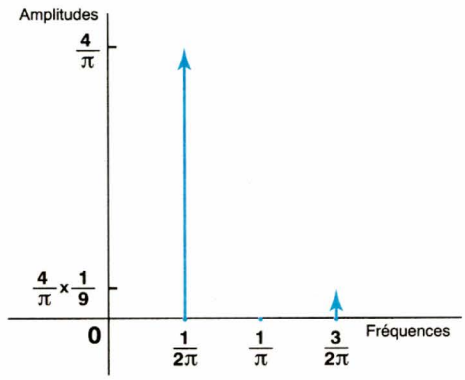
(valeur arrondie à $10^{-2} = 7{,}63$).

2e cas

1.



2.



3. $E_m(s) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \dfrac{\pi^2}{3}$.

4. $E_m(F_3) = \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{9\pi}\right)^2\right)$

$= \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{656}{81\pi^2} = \dfrac{81\pi^4 + 2\,624}{324\pi^2}$

valeur arrondie à 10^{-2} de $E_m(F_3) = 3{,}29$.

5. $E_m(\ell) = \dfrac{\pi^2}{3} - \left[\dfrac{81\pi^2 + 2\,624}{324\pi^2}\right] = \dfrac{27\pi^2 - 2\,624}{324\pi^2}$

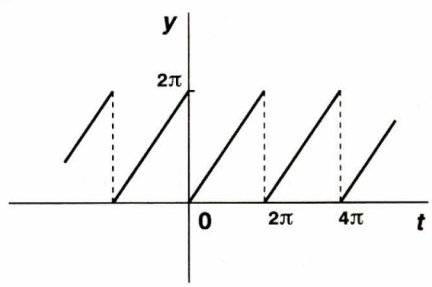
valeur arrondie à 10^{-4} de $E_m(\ell) = 0{,}0019$.

6. $10 \log\left(\dfrac{E_m(s)}{E_m(\ell)}\right) = 10 \log\left(\dfrac{108\pi^2}{27\pi^2 - 2\,624}\right)$

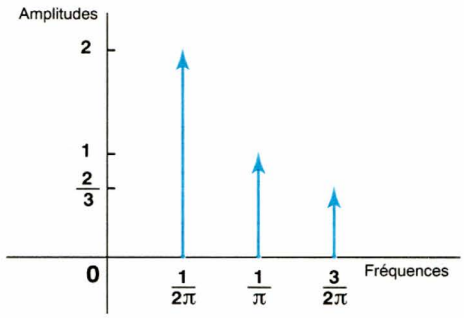
dont la valeurs arrondi à 10^{-2} est égale à 32,41.

3e cas

1.



2.



3. $E_m(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$.

(valeur arrondie à $10^{-2} = 13{,}16$)

4. $E_m(F_3) = \pi^2 + \frac{1}{2}\left(2^2 + 1^2 + \frac{4}{9}\right)$

$= \pi^2 + \frac{49}{18} = \frac{18\pi^2 + 49}{18}$

(valeur arrondie à $10^{-2} = 12{,}60$).

5. $E_m(e) = \frac{4\pi^2}{3} - \frac{18\pi^2 + 49}{18} = \frac{6\pi^2 - 49}{18}$

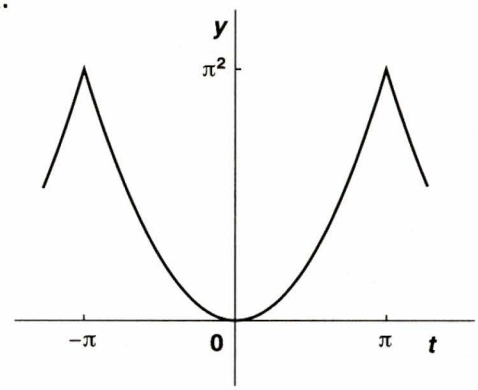
valeur arrondie à $10^{-2} = 0{,}57$.

6. $10 \log\left(\frac{E_m(s)}{E_m(e)}\right) = \log\left(\frac{24\pi^2}{6\pi^2 - 49}\right)$

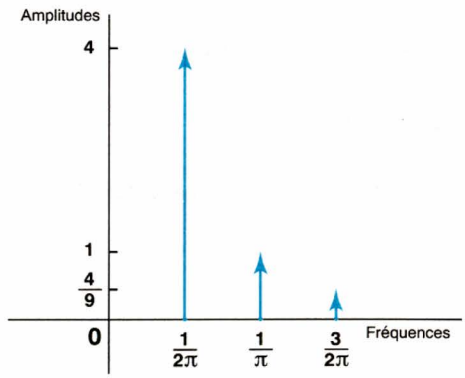
dont la valeur arrondie à 10^{-2} est égale à 13,65.

4e cas

1.



2.



3. $E_m(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{5}$

valeur arrondie à $10^{-2} = 19{,}48$.

4. $E_m(F_3) = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\left(16 + 1 + \frac{16}{81}\right) = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1393}{162}$

valeur arrondie à $10^{-2} = 19{,}42$.

5. $E_m(e) = \frac{\pi^4}{5} + \left(\frac{18\pi^4 + 1\,393}{162}\right) = \frac{72\pi^4 - 6\,965}{810}$

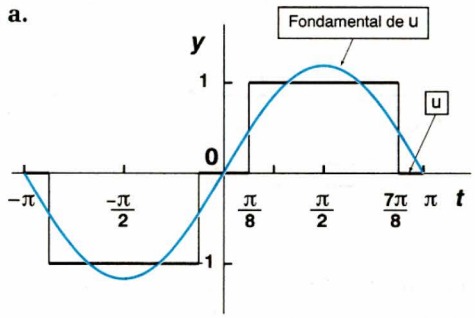
valeur arrondie à $10^{-2} = 0{,}06$.

6. $10 \log\left(\frac{E_m(s)}{E_m(e)}\right) = 10 \log\left(\frac{162\pi^4}{72\pi^4 - 6\,965}\right)$

valeur arrondie à 10^{-2} : 25,12.

PROBLÈME 2

1. a.



b. La valeur moyenne est nulle (signal impair)

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,dt = 0$.

c. Le signal u étant impair, on a :

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0$.

$b_1 = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 1{,}176$ (valeur arrondie à 10^{-3})

$b_2 = 0$

$b_3 = \frac{4}{3\pi}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0{,}162$

$b_4 = 0$

$b_5 = -\frac{4}{5\pi}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx -0{,}098$

$b_6 = 0$

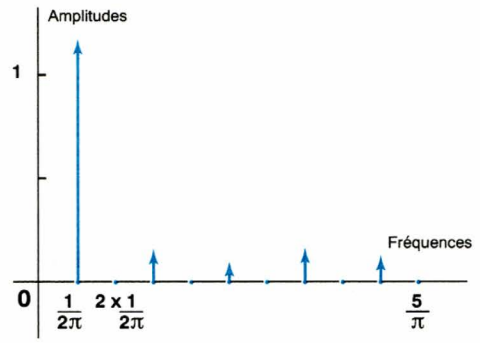
$b_7 = -\frac{4}{7\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx -0{,}168$

$b_8 = 0$

$b_9 = -\frac{4}{9\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx -0{,}131$

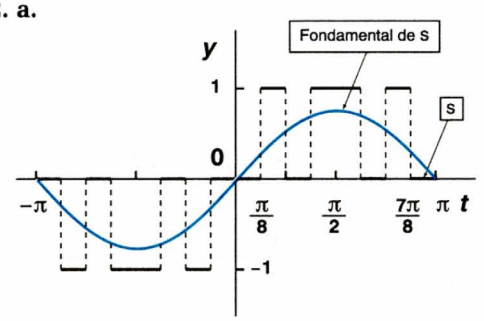
$b_{10} = 0$.

d. Spectre d'amplitude



e. Le fondamental est le signal défini sur $\mathbb{R}$ par :
$t \mapsto \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin(t)$ (représentation : voir diagramme).

2. a.



b. La valeur moyenne est nulle (signal impair).

c. $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (signal impair)

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]-\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}763$$

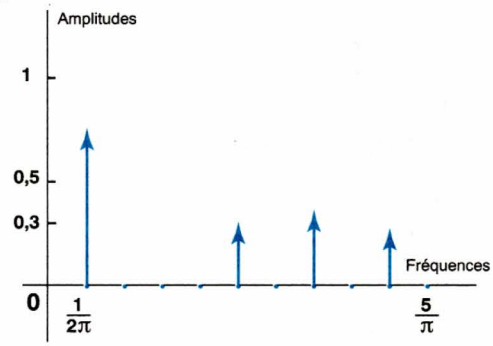
(valeur arrondie à 10^{-3})

$b_2 = 0$

$$b_3 = \frac{4}{3\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]+\frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \approx 0{,}070$$

(valeur arrondie à 10^{-3})

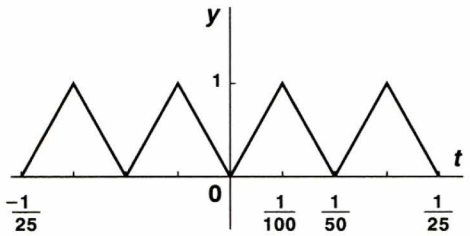
d.



e. [voir diagramme].

PROBLÈME 4

1.



2. $\overline{s} = \frac{100}{2}\int_{-\frac{1}{100}}^{\frac{1}{100}} s(t)\,dt$

$$= \frac{100}{2}\times\left(1\times\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}$$

(en utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale).

3. $b_1 = 0$.

4. a. $u(0) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{100\pi}\right]=\frac{1}{100\pi^2}$

$$u\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{100}\cdot\sin\left(100\pi\times\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{100\pi}\cos\left(100\pi\times\frac{1}{100}\right)\right]$$

$$u\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{100\pi}\right]=-\frac{1}{100\pi^2}$$

$$u'(t) = \frac{1}{\pi}\left[\sin(100\pi t)+100\pi t\cos(100\pi t) - \frac{100\pi}{100\pi}\sin(100\pi t)\right]$$

$$u'(t) = \frac{1}{\pi}\left[100\pi t\cos(100\pi t)\right] = 100t\cos(100\pi t).$$

b. Formule générale

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

ici $T = \frac{2}{100}$ donc :

$$a_1 = 2\times\frac{2}{100}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos\left(2\pi\times\frac{100}{2}\times t\right)dt$$

$$= 100\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\cos(100\pi t)\,dt\ .$$

Le signal s étant pair (*)

$$a_1 = 2\times100\times\int_0^{\frac{1}{100}} 100t\cdot\cos(100\pi t)\,dt$$

$$a_1 = 2 \times 100 \times [u(t)]_0^{\frac{1}{100}} = 200 \times \left(u\left(\frac{1}{100}\right) - u(0)\right)$$
$$= 200 \times \frac{-2}{100\pi^2} = \frac{-4}{\pi^2}$$

((*) on aurait pu aussi écrire

$$\int_{-T/2}^{T/2} \bullet = \left(\int_{-T/2}^{0} \bullet + \int_{0}^{T/2} \bullet \right).$$

5. F_1 est défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \cos(100\pi t).$$

RÉPARTITION DES CHAPITRES SELON LES SPÉCIALITÉS

Métiers de l'électricité	Chapitres au programme Tome 1	Tome 2
Équipements et installations électriques EIE	**1 à 8 11 - 13 - 14**	**1 à 7**
Maintenance (réseaux bureautique, télématique)	**1 à 8 11 - 13 - 14**	**1 à 7**
Maintenance de l'audiovisuel électronique MAVELEC	**1 à 8 11 - 13 - 14**	**1 à 7**
Chimie - Énergétique		
Industries chimiques et de procédés ICP	**1 à 10**	**1, 2 et 4 (1.)**
Énergétique *option :* installation et mise en œuvre des systèmes énergétiques et climatiques *option :* gestion et maintenance des systèmes énergétiques et climatiques	**1 à 10 - 15**	**1, 2 et 4 (1.)**
Industries graphiques (préparation de la forme imprimante)	**1 à 10**	**1, 2 et 4 (1.)**
Industries graphiques (impression)	**1 à 10**	**1, 2 et 4 (1.)**
Bio-industries de transformation	**1 à 10 - 15**	**1, 2 et 4 (1.)**
Hygiène et environnement	**1 à 10**	**1, 2 et 4 (1.)**

CHAPITRES DES TOMES 1 ET 2

Secteur industriel - Tome 1

1. Le premier degré
2. Le second degré
3. Suites arithmétiques - Suites géométriques
4. Fonctions numériques - Activités
5. Nombre dérivé - Fonction dérivée
6. Fonctions et dérivation
7. Fonctions logarithmes et exponentielles
8. Activités géométriques
9. Séries statistiques à une variable
10. Séries statistiques à deux variables
11. Vecteurs du plan - Produit scalaire
12. Géométrie dans l'espace
13. Trigonométrie
14. Équations trigonométriques - Formules d'addition
15. Initiation aux probabilités

Secteur industriel - Tome 2
(Électricité - Chimie - Énergétique)

1. Dérivation - Compléments
2. Calcul intégral
3. Nombres complexes
4. Équations différentielles
5. Signaux périodiques
6. Somme de signaux périodiques
7. Approximation d'un signal périodique

FORMULAIRE
BACCALAURÉAT PROFESSIONNEL

MÉTIERS DE L'ÉLECTRICITÉ

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$au(x)$	$au'(x)$
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

– Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :
$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r.
Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Somme des k premiers termes :
$u_1 + u_2 \ldots + u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$.

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q.
Terme de rang n : $u_n = u_1\, q^{n-1}$.
Somme des k premiers termes :
$u_1 + u_2 \ldots + u_k = u_1 \frac{1-q^k}{1-q}$.

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln(a^n) = n \ln a$.
$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

Équations différentielles

$y' - ay = 0$ $\quad y = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$ $\quad y = a\cos \omega x + b \sin \omega x$.

Trigonométrie

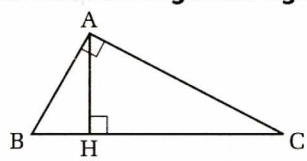
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
$= 1 - 2\sin^2 a$
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Nombres complexes ($j^2 = -1$)

forme algébrique	forme trigonométrique
$z = x + jy$	$z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$
$\overline{z} = x - jy$	$\overline{z} = \rho(\cos\theta - j\sin\theta)$
$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$	$\rho = \lvert z\rvert$
	$\theta = \arg(z)$.

Relations métriques dans le triangle rectangle

$AB^2 + AC^2 = BC^2$



$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.

Calcul vectoriel dans le plan

$\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$
Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$: $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \cos(\vec{v}, \vec{v}')$
$\vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$.

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$ $\quad$ **Trapèze :** $\frac{1}{2}(B+b)h$
Disque : πR^2.

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh.
Sphère de rayon R :
Aire : $4\pi R^2$ $\quad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$.
Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3} Bh$.

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$* \int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

$$* \int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt.$$

FORMULAIRE
BACCALAURÉAT PROFESSIONNEL

CHIMIE - ÉNERGÉTIQUE

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)$	$f'(x)$
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
e^{ax+b}	ae^{ax+b}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$au(x)$	$au'(x)$
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{[v(x)]^2}$

Équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

– Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

– Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Si $\Delta \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Statistiques

Effectif total $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

Moyenne $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{N}$.

Variance $V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$.

Écart type $\sigma = \sqrt{V}$.

Suites arithmétiques

Terme de rang 1 : u_1 et raison r.

Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)\,r$.

Somme des k premiers termes :

$u_1 + u_2 \ldots + u_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2}$.

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et raison q.

Terme de rang n : $u_n = u_1\,q^{n-1}$.

Somme des k premiers termes :

$u_1 + u_2 \ldots + u_k = u_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}$.

Logarithme népérien : ln

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln(a^n) = n \ln a$.

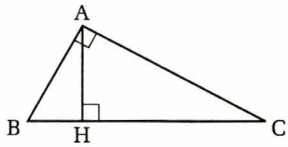
$\ln(a/b) = \ln a - \ln b$

Équations différentielles

$y' - ay = 0$ $\quad y = ke^{ax}$.

Relations métriques dans le triangle rectangle

$AB^2 + AC^2 = BC^2$



$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}\,bc \sin \widehat{A}$ **Trapèze :** $\frac{1}{2}(B + b)\,h$

Disque : πR^2.

Aires et volumes dans l'espace

Cylindre de révolution ou prisme droit d'aire de base B et de hauteur h : Volume Bh.

Sphère de rayon R :

Aire : $4\pi R^2$ $\quad$ Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Cône de révolution ou pyramide de base B et de hauteur h : Volume $\frac{1}{3}Bh$.

Calcul intégral

* Relation de Chasles :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

$$* \int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

$$* \int_a^b kf(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt.$$

Édition : Gilbert Codet et Gilles Boudet
Coordination artistique : Sophie Lepouzé
Conception et mise en page : Studio Primart
Illustrations : Thierry Lamouche
Schémas : SCCM et Antoine Rodelet
Couverture : L'BB

"Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs.
Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération.
En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite".

N° d'éditeur : 10034590 - 1 - (9) - OSBT - 80 - SCCM, juin 1996
Imprimé en France par Mame Imprimeurs à Tours n° 37338

Ce manuel, accessible à tout élève préparant un baccalauréat professionnel tertiaire et, en conformité avec les nouveaux programmes de mathématiques, a pour principaux objectifs :

- la consolidation des acquis du BEP,
- l'acquisition de nouveaux outils nécessaires à l'enseignement des autres disciplines scientifiques et techniques,
- le développement de méthodologies qui prennent en compte la représentation graphique et l'utilisation de la calculatrice,
- l'introduction d'activités issues de la vie économique et sociale ou du domaine professionnel.

Ce manuel veut ainsi être une préparation efficace à l'épreuve de mathématiques du baccalauréat professionnel.

NATHAN

DANGER
LE
PHOTOCOPILLAGE
TUE LE LIVRE

9 782091 772370